

LE CALCUL VECTORIEL

ET

SES APPLICATIONS

A LA

GÉOMÉTRIE RÉGLÉE

PAR

J. GUIOT



PARIS

LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE A. HERMANN & FILS

ÉDITEUR, LIBRAIRE DE S. M. LE ROI DE SUÈDE ET DE NORVÈGE
6, rue de la Sorbonne

—
1912

LE CALCUL VECTORIEL

ET

SES APPLICATIONS

A LA

GÉOMÉTRIE RÉGLÉE

THÈSE

PRÉSENTÉE

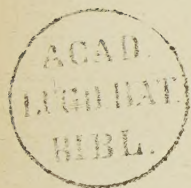
A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE FRIBOURG (Suisse)

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS-SCIENCES

PAR

J. GUIOT



PARIS

LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE A. HERMANN & FILS

ÉDITEUR, LIBRAIRE DE S. M. LE ROI DE SUÈDE ET DE NORVÈGE

6, rue de la Sorbonne

—
1912

α

Monsieur M.-Fr. Daniëls

Docteur ès-sciences

Professeur à l'Université de Fribourg (Suisse)

Hommage

de respectueuse gratitude



Digitized by the Internet Archive
in 2026

INTRODUCTION

« Le calcul géométrique a été deviné par LEIBNIZ (1679) ¹ qui, le premier, reconnut la nécessité d'opérer directement sur les éléments géométriques. Mais l'opération introduite par Leibniz n'a pas les propriétés ordinaires des opérations algébriques ; aussi l'auteur n'a-t-il pu pousser bien loin les recherches géométriques ². »

Les progrès de la géométrie analytique semblent avoir détourné de cette voie. Mais l'idée de Leibniz était destinée à être reprise. En 1797 C. WESSEL ³ donne une représentation analytique de la direction qui contient la représentation géométrique de BUÉE ⁴ et d'ARGAND ⁵. La représentation d'Argand fut retrouvée en 1828 par MOUREY ⁶ en France et par WARREN en Angleterre. Les travaux de CAUCHY et de GAUSS sur les propriétés de l'expression $a + bi$ et la théorie des nombres complexes lui ont donné une importance exceptionnelle ⁷.

¹ *Leibnizens Math. Schriften*, Berlin, 1849, t. II, p. 17 et t. V, p. 133.

² BURALI-FORTI, C. *Introduction à la géométrie différentielle, suivant la méthode de H. Grassmann* ; Paris, Gauthier-Villars, p. v.

³ *Om directionens analytiske Betegning* (Kjöb. 1799), traduit à l'occasion du centenaire, par MM. H. Valentiner et T. N. Thiele. *Essai sur la représentation analytique de la direction* (Copenhague).

⁴ *Phil. Trans.*, 1806.

⁵ ARGAND, J. R. *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques* ; Paris, Blanc 1806. — 2^{me} édition publiée par J. HOUEL ; Paris, Gauthier-Villars 1874.

⁶ *Vraie théorie des quantités négatives et des quantités prétendues imaginaires* (1828-1862).

⁷ Voir TAIT. P. G. *Sc. Pap.* (Cambridge, University Press, 1900), II, p. 447 ; ou *Encyclopaedia Britannica*, Quaternions 1886.

« MÖBIUS, avec le calcul barycentrique ¹ et BELLAVITIS avec la méthode des équipollences ² donnent deux méthodes de calcul géométrique, indépendantes entre elles, et qu'ils appliquent à plusieurs questions de géométrie pure et de mécanique ³. » La méthode de Bellavitis ou des équipollences introduit systématiquement la somme géométrique des vecteurs et les égalités entre les vecteurs. Elle se retrouvera dans toutes les analyses vectorielles. Le calcul barycentrique est un cas particulier des formations de Grassmann, les formations de première espèce.

L'année 1844 est remarquable dans l'histoire de cette question par suite de l'apparition simultanée des quaternions de W. R. HAMILTON et de l'Ausdehnungslehre de H. GRASSMANN ⁴. Le jour même de sa découverte, 13 novembre 1843, Hamilton en fit part au conseil de l'Académie royale d'Irlande. Ses idées nouvelles sur les quaternions furent reprises et développées avec plus d'ampleur dans une série d'articles parus à partir de juillet 1844 dans le *Philosophical Magazine*, puis dans les *Irish Academy Proceedings*. Poursuivant son étude, Hamilton fit paraître en 1853 les *Lectures on quaternions*, et en 1866 les *Elements of quaternions*. Les ouvrages sur les quaternions sont nombreux ⁵. La notation d'Hamilton a été adoptée par CLERK MAXWELL dans son *Electricity and Magnetism*, ce qui a contribué beaucoup à en répandre l'usage.

La première édition de l'Ausdehnungslehre passa presque inaperçue. L'une des causes fut dans la forme philosophique

¹ MÖBIUS A. F. *Der barycentrische Calcul* (1827); Ges. Werke, Leipzig, Hirzel, I, p. 1-388. — *Die Elemente der Mechanik des Himmels* (1843); IV, p. 1-318.

² On trouvera une liste des principaux écrits de BELLAVITIS dans la traduction que M. C.-A. LAISANT a publiée (Paris, Gauthier Villars, 1874) de l'*Exposition de la méthode des équipollences*, par G. Bellavitis, p. XII et XIII.

³ BURALI-FORTI, *Introduction*, p. V et VI.

⁴ Voir GIBBS, J. W. Sc. Pap. (London, Longmans 1906) II, p. 161 : *Quaternions and the Ausdehnungslehre*.

⁵ Voir la note bibliographique placée en tête de l'*Introduction à la méthode des quaternions*, par C.-A. LAISANT (Paris, Gauthier-Villars, 1881). Voir aussi V. SCHLEGEL : *Die Grassmann'sche Ausdehnungslehre. Ein Beitrag zur Geschichte der Mathematik in den letzten fünfzig Jahren* (Zeitsch. f. Math. und Phys., 1896) et encore le *Bulletin of the international association for promoting the study of quaternions and allied systems of mathematics*.

de l'exposé et le peu de précision des notions introduites ¹. Dans l'édition de 1862 H. Grassmann reprit cet exposé et le présenta sous une autre forme ; en profitant des travaux de CAUCHY sur les clefs, il a donné à son système une forme définitive. Tandis que la méthode des quaternions conduit à la géométrie de la droite, celle de Grassmann peut être définie une géométrie du point. De plus, Grassmann songeait à construire un système contenant, comme cas particuliers, tous les systèmes imaginables de géométrie. Un tel résultat ne pouvait être obtenu qu'aux dépens de la simplicité. A cela s'ajoutait le caractère abstrait de l'exposé ². Aussi en dépit de sa puissance et de sa perfection ce système s'est-il peu répandu. Toutefois l'exposé qu'en a fait G. PEANO ³ en a facilité beaucoup l'intelligence.

A ces deux méthodes vient s'adjoindre en 1858 le célèbre *Memoir on the theory of matrices* de CAYLEY ⁴. Mais bien que ce point de vue ait paru nouveau, on le trouve déjà inclus dans l'*Ausdehnungslehre* de 1844 ⁵.

Depuis Hamilton et Grassmann, géomètres et physiciens se trouvaient munis de deux méthodes distinctes, capables de se prêter à toutes les exigences des théories. Mais malgré les travaux entrepris par ces moyens, surtout à l'aide des quaternions, ni l'une ni l'autre n'ont eu un vrai succès. C'est que la méthode de Grassmann manque de simplicité : même après les travaux de Peano, elle exige un effort d'esprit considérable. Les quaternions, eux aussi, demandent une formation spéciale, pénible à acquérir. En outre, les problèmes usuels des géomètres et des physiciens peuvent souvent être résolus avec des méthodes plus simples, qui

¹ J. MASSAU : *Cours de mécanique de l'Université de Gand* (3^{me} édit. 1891, Gand, Lobel ; Paris, Gauthier-Villars), p. 469 et suiv.

² FEHR, H. *Application de la méthode vectorielle de Grassmann à la géométrie infinitésimale* (Paris, Carré et Naud, 1900).

³ PEANO, G. *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann* (Torino, Bocca, 1888).

⁴ CAYLEY, A. *A memoir on the theory of matrices* (Phil. Trans, 1858, t. 148, p. 17-37 ou Coll. Math. Pap. II, p. 475-496).

⁵ GIBBS, J. W. *On multiple Algebra* (Sc. Pap. II, p. 95).

ne font usage que d'éléments particuliers introduits dans l'une ou l'autre de ces deux méthodes. C'est ainsi que, dans la méthode des quaternions, les problèmes n'exigent guère que les deux notions de scalaire et de vectoriel : le quaternion n'intervient que rarement¹. Et si l'on ajoute à cela l'habitude de la géométrie cartésienne, l'ensemble des travaux exprimés dans cette notation, la difficulté de les transcrire dans les notations nouvelles, on comprendra l'échec relatif de la méthode à cette époque.

Cependant la place de plus en plus grande prise par la notion de vecteur dans les diverses branches des mathématiques et de la physique, exigeait une attention spéciale. Les mêmes besoins ont amené dans les divers pays la création d'une algèbre spéciale, créée en vue des problèmes usuels et réduite à la plus simple expression. Ce qui prouve bien la nécessité de cet organe, c'est qu'il s'est créé indépendamment dans les divers pays. Et ce qui montre sa valeur et son caractère naturel, c'est que, en dépit des différences de notations, les diverses algèbres des vecteurs sont toutes équivalentes quant aux éléments et quant aux fonctions qu'elles introduisent. Toutefois, avant de les passer en revue, il faut bien reconnaître qu'elles se sont inspirées des travaux d'Hamilton et de Grassmann. Tout en prétendant les remplacer pour les besoins courants, elles ont profité de leurs créations et n'ont fait que choisir parmi des procédés surabondants, ceux qu'il convenait de mettre en relief.

L'un des premiers essais, quoique des moins cités, d'une géométrie vectorielle minimum paraît être celui de J. MASSAU (1852-1909) professeur à l'Université de Gand. Il parut dans le *Cours de mécanique de l'Université de Gand*². Massau donne au calcul vectoriel le nom de géométrie symbolique. « Dans toute sa généralité, dit-il³, la géométrie symbolique est une géométrie

¹ GIBBS, J. W. *Quaternions and the algebra of vectors* (Sc. Pap. II, p. 169 et suiv.)

² MASSAU, J. *Cours de mécanique de l'Université de Gand* (1^{re} édition 1879, 3^{re} édition 1891 ; Gand, autogr. Lobel ; Paris, Gauthier-Villars).

³ MASSAU. *Cours de mécanique*, p. 408.

où l'on représente les opérations à effectuer sur des points, droites, courbes, surfaces, etc., par des symboles plus condensés que ceux de l'analyse ordinaire. Nous avons surtout appliqué les symboles $\Sigma\bar{a}$, $\bar{a}\bar{b}$, $M\bar{a}\bar{b}$ La notation $\Sigma\bar{a}$ est de Saint-Venant (Comptes rendus, 1845) ¹. Le produit $\bar{a}\bar{b} = ab \cos(a, b)$ a été imaginé par M. Resal sous le nom de produit géométrique (Cinématique 1862). M. Resal a appliqué les symboles $\Sigma\bar{a}$ et $\bar{a}\bar{b}$ dans son traité de mécanique. Nous l'avons imité et introduit le symbole $M\bar{a}\bar{b}$. C'est l'emploi systématique de ces symboles qui donne à notre cours une forme particulière ». En note Massau fait remarquer que Justus Grassmann, en 1824, a déjà considéré le parallélogramme comme un produit de deux vecteurs. Son fils, H. Grassmann dans l'*Ausdehnungslehre* (1844) appelle ce produit *aüssere Multiplikation der Strecken* (chap. V). B. de Saint-Venant a aussi défini sous le nom de produit géométrique d'une aire par un vecteur et produit géométrique de deux vecteurs, des combinaisons analogues à celles étudiées par H. Resal et J. Massau. Mais le progrès réalisé par Massau consiste dans la substitution aux aires planes des vecteurs qui les représentent ². Par ailleurs Hamilton fait usage des symboles $\Sigma\alpha$, $S\alpha\beta$, $V\alpha\beta$, qui, sauf leur origine, sont équivalents aux symboles de Massau $\Sigma\bar{a}$, $\bar{a}\bar{b}$ et $M\bar{a}\bar{b}$. Il ne semble pas d'ailleurs que Massau se soit proposé de simplifier les théories de Grassmann et d'Hamilton, bien que, dans l'édition de 1891, il montre avec quelle facilité on peut retrouver par sa méthode élémentaire les résultats compliqués de ces deux auteurs ³. A côté de ces éléments, le calcul géométrique introduit la fonction linéaire d'un vecteur ⁴. Le fond, ici, paraît bien emprunté directement à

¹ *Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences de Paris*, 1845, 2nd semestre, p. 620.

² Voir DEMOULIN, A. *Mémoire sur l'application d'une méthode vectorielle à l'étude des divers systèmes de droites* (Complexes, congruences, surfaces réglées); Bruxelles, Castaigne, 1894, p. v et vi.

³ Dans le même but M. DANIELS a publié une note « Sur le Calcul des quaternions »; *Ens. math.*, 1902, IV, p. 111-124.

⁴ MASSAU, J. *Cours de mécanique*, p. 292.

la théorie des quaternions. Les notations sont les mêmes, l'exposé seul est simplifié. Massau n'a pas éprouvé le besoin d'introduire le produit indéterminé de deux vecteurs dénommé par Gibbs *dyad* ¹, et son exposé est des plus simples. L'auteur ne s'est proposé que les applications de mécanique pure. Aussi n'a-t-il pas introduit systématiquement les symboles indispensables à l'analyse des vecteurs : le gradient, la divergence et la rotation (ou curl). Par contre, il a généralisé pour l'espace à n dimensions les opérations vectorielles et les propriétés de la fonction linéaire ². Cette extension paraît être la première en date, dans la forme simplifiée qui nous occupe, et actuellement du moins, la seule publiée.

Le calcul vectoriel de Massau ne paraît pas s'être répandu hors de la Belgique. En France, en dépit des travaux de Cauchy, B. de Saint-Venant, H. Resal, les géomètres et les physiciens n'ont jusqu'ici attaché que peu d'importance à ces perfectionnements de méthode qu'ils regardent comme purement formels, et n'attaquant pas le fond même des questions. Chez plusieurs la répugnance se justifie par la crainte d'écarter les lecteurs et les élèves, effrayés d'un procédé qui n'a rien d'essentiel, et étranger d'ailleurs aux coordonnées cartésiennes, seules usitées jusqu'ici dans l'analyse. Les méthodes d'Hamilton et de Grassmann en particulier ont trouvé les esprits rebelles; quelques tentatives pourtant ont été faites pour les simplifier. La première et la plus remarquable d'entre elles est celle de M. E. CARVALLO; bien qu'il ne soit « pas partisan d'un système minimum qu'il faut abandonner, dit-il ³, quand on s'élève dans la généralité », il ne conserve, comme Massau, que les notions de scalaire et de vectoriel et se débarrasse des quaternions. Il expose ⁴ les différentes propriétés de la fonction linéaire en partant de la théorie

¹ GIBBS J. W. *Vector analysis*. Sc. Pap. II, p. 53.

² MASSAU, J. *op. cit.*, p. 436 : Géométrie symbolique à n dimensions.

³ *Ens. math.*, XI, 1909, p. 381.

⁴ *Sur les systèmes linéaires, le calcul des symboles différentiels et leur application à la physique mathématique* (Monatshefte für Math. und Phys., 1891, II, p. 177-216, 225-256, 311-330).

des « systèmes linéaires » établie par E. LAGUERRE ¹. Non seulement sa théorie n'est pas basée sur les quaternions, mais comme le fait remarquer M. V. Schlegel ², les quaternions ne sont qu'un cas particulier de la fonction vectorielle considérée. La simplicité et l'élégance avec lesquelles M. Carvallo amène son lecteur aux applications du calcul vectoriel en physique mathématique se retrouvent dans son exposé de *la méthode de Grassmann* ³. Partant du volume du tétraèdre, l'auteur démontre que cette méthode embrasse les déterminants ⁴, la mécanique, les coordonnées cartésiennes et tétraédriques, le principe de dualité, l'homographie et par suite les propriétés projectives des figures.

Pendant que Massau professait et publiait à Gand son cours de mécanique, W. GIBBS, de Yale University, faisait imprimer, sans la répandre dans le public, une brochure intitulée : *Elements of vector analysis* (New Haven 1881) ⁵. Plus tard, en 1884, il y fit ajouter un important complément ⁶. Le but de Gibbs est d'introduire pour les relations les plus importantes entre vecteurs ou entre vecteurs et scalaires des notations convenables qui se prêtent plus facilement aux transformations analytiques, et d'établir quelques-unes de ces transformations. Bien qu'apparentée aux quaternions, la méthode se rapproche davantage, pour le fond, des idées de Grassmann ⁷. Dans la première partie du travail, Gibbs définit les vecteurs, l'addition des vecteurs ; puis il introduit le *direct product*, produit interne ou produit géométrique de Resal-Massau, représenté par $\alpha.\beta$, et le *skew product*, produit externe ou moment géométrique de Massau, représenté par $\alpha \times \beta$.

¹ LAGUERRE : *Sur le calcul des systèmes linéaires* ; Journ. éc. polyt. 42^{me} Cahier, 1867, p. 215-264.

² Voir *Jahrbuch über die Fortsch. der Math.*, XXIII, 1891, p. 733.

³ CARVALLO, E. *La méthode de Grassmann*, Nouv. Ann. 3^{me} série, XI, 1892, p. 8-37.

⁴ Voir aussi la *Théorie des déterminants*, Nouv. Ann. (3), X, 1891, p. 219-224 et la *Multiplication des déterminants*, *ibid.*, p. 341-345.

⁵ GIBBS, Sc. Pap., II, p. 17-52.

⁶ GIBBS, Sc. Pap., II, p. 52-90.

⁷ GIBBS, Sc. Pap., II, p. 17.

De la relation entre un système de quatre vecteurs, il déduit la solution directe de l'équation linéaire vectorielle. L'auteur passe ensuite à la différentiation et à l'intégration des vecteurs et conserve les notions de gradient, de divergence et de curl, pour lesquelles il emploie les notations respectives ∇ , $\nabla \cdot$, $\nabla \times$. La deuxième partie du travail, publiée en 1884, reprend le calcul intégral à l'aide des vecteurs, mais elle est principalement consacrée à la fonction linéaire. L'auteur y introduit la notion de dyade et de dyadique et il établit un certain nombre de propriétés de la fonction linéaire Φ dénommée dyadique.

Le système de Gibbs, comme celui de Massau, est issu des besoins mêmes de l'enseignement. L'auteur s'en est servi pour exposer l'électricité et le magnétisme, ainsi que la théorie électromagnétique de la lumière ¹. La brochure *Elements of vector analysis* ne passa pas inaperçue ², et provoqua des critiques de la part des quaternionistes. TAIT dans la troisième édition de son traité des quaternions, en parle en ces termes : « Even Prof. Williard Gibbs must be ranked as one of the retarders of quaternions progress, in virtue of his pamphlet on Vector Analysis, a sort of hermaphrodite monster, compounded of the notations of Hamilton and of Grassmann. » Gibbs crut devoir protester dans *Nature* (1891, XLIII, p. 511-513). Il justifie l'emploi des seuls produits interne et externe comme suffisants et seuls nécessaires, et montre l'avantage de ses notations. Il revient sur cette polémique en 1893 (*Nature*, XLVII, p. 463-464) en réponse à MC. AULAY et (*Nat.*, XLVIII, 1893, 364-367) contre KNOTT qui soutiennent que les quaternions seuls fournissent une base suffisante pour la géométrie vectorielle.

Gibbs manquant de loisir pour reprendre sa brochure, laissa à l'un de ses élèves, M. E. B. WILSON, le soin de la développer et toute liberté pour l'exposer à sa guise. M. Wilson a profité de la

¹ Voir WILSON, E. B. *Vector Analysis*, London, Arnold ; 2^{me} édit., 1909, p. XII.

² GIBBS, Sc., Pap., II : *On the role of quaternions in the algebra of vectors* (p. 155-160) ; *Quaternions and the algebra of vectors* (p. 169-172) ; *Quaternions and vector analysis* (p. 173-181).

liberté qui lui était laissée pour faire quelques emprunts à l'*Electromagnetic theory* of O. HEAVISIDE (1893) et à *Die Maxwell'sche Theorie der Electricität* de FÖPPL (Teubner 1894). Les principes de Gibbs ne sont pas modifiés, non plus que ses notations. De nombreux exemples éclaircissent la théorie et rendent la lecture aussi intéressante que fructueuse.

Les travaux de Gibbs pas plus que ceux de Massau ne paraissent avoir exercé d'influence en Angleterre et en Allemagne. Il n'en est pas de même des travaux d'HEAVISIDE dont les théories sur les ondes électromagnétiques¹ furent particulièrement remarquées. Comme Gibbs, Heaviside ne conserve que le produit interne qu'il désigne par $\alpha\beta$ supprimant le S de la notation quaternioniste, et le produit externe pour lequel il maintient $\nabla\alpha\beta$ ².

La notation et l'exposé simplifié de Heaviside ont été adoptés en Allemagne par M. A. FÖPPL dans trois de ses ouvrages : *Einführung in die Maxwell'sche Theorie der Electricität* (Leipzig, Teubner, 1894; 2^{me} édition, par M. ABRAHAM, 2 vol. Teubner, 1904-1905); *die Geometrie der Wirbelfeder, in Anlehnung an das Buch des Verfassers über die Maxwell'sche Theorie der Electricität und zu dessen Ergänzung* (Teubner, 1897); *Vorlesungen über technische Mechanik* (4 vol., Teubner, 1898). Dans ce dernier ouvrage, l'auteur, comme Massau dans sa mécanique, n'introduit que le produit interne et le produit externe; dans les deux premiers, le gradient, la divergence et la rotation (curl ou Wirbel) sont désignés par les notations ∇ (del), div et curl, avec la remarque : $\text{div}\mathfrak{A} = \nabla\mathfrak{A}$ et $\text{curl}\mathfrak{A} = \nabla\mathfrak{A}$ ³.

Les notations de Heaviside et de Föppl ont été adoptées par M. DANIELS dans les différents ouvrages ou mémoires qu'il a publiés⁴.

¹ *Philos. Mag.*, 5^{me} série, 1885, t. XIX, p. 397-419; 1888, t. XXV, p. 130-156, 202-210, 379-405; t. XXVI, p. 360-382, 434-449, 488-500; 1889, t. XXVII, p. 29-50. *Electrical Papers*, 2 vol. London, Macmillan, 1892. — *Electromagnetic theory*, 2 vol. London, Electrician Co., 1893, 1899.

² *Philos. Mag.*, 1885 (5), XIX, p. 397 et suiv.

³ A. FÖPPL : *Einführung*, 1894, p. 41.

⁴ DANIELS, M.-F. : *Über die Derivierte eines Vectors* (Zeitsch. Math. Phys., 1900, t. 45, p. 203-215). — *Sur un système de coordonnées sphériques homo-*

L'analyse vectorielle réduite à ses éléments fondamentaux s'est généralisée rapidement chez les physiciens allemands. A part TIMERDING ¹ et JAHNKE ² qui se montrent aussi fidèles que possible aux idées de Grassmann, la plupart se sont lancés résolument dans la voie ouverte par Föppl; qu'il nous suffise de citer LORENTZ ³, ABRAHAM ⁴, BUCHERER ⁵, FISCHER ⁶, GANS ⁷, VALENTINER ⁸, V. IGNATOWSKY ⁹.

Jusqu'à ces dernières années l'analyse vectorielle simplifiée n'était représentée par aucun ouvrage italien. En 1909, C. BURALI-FORTI publie, en collaboration avec R. MARCOLONGO, les *Elementi di calcolo vettoriale* ¹⁰ (Bologna, Zanichelli) complétés la même année par l'*Omografie vettoriali* (Torino, Petrini). Le premier ouvrage contient les principes du calcul et de l'analyse vectoriels; il ne diffère que par les notations, de ceux qui précèdent

gènes (Ann. soc. sc. Brux., 1901, t. 25, p. 138-141). — *Sur le calcul des quaternions* (Ens. math., 1902, t. 4, p. 111-124). — *Analytische Sphärik in homogenen Koordination* (Arch. Math. Phys., 1903 (III), 5, p. 261-273). — *Les coordonnées projectives sur la sphère* (Ens. math., 1905, VII, p. 206-221). — *Essai de géométrie sphériques en coordonnées projectives* (Fribourg, librairie de l'Université, 1907, VIII, 279 p.).

¹ TIMERDING, H. E. *Geometrie der Kräfte* (Leipzig, Teubner, 1908, XI, 381 p.).

² JAHNKE, E. *Vorlesungen über die Vektorenrechnung* (Leipzig, Teubner, 1905, XII, 235 p.).

³ LORENTZ, H. A. *Versuch einer Theorie der electrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern* (Leiden, E. J. Brill, 1895; Leipzig, Teubner, 1906, 138 p.). — *The theory of electrons* (Leipzig, Teubner, 1909, 332 p.).

⁴ ABRAHAM, M. *Geometrische Grundbegriffe* (Encykl. IV, 2, 1901, 47 p.). — *Theorie der Electricität* (Leipzig, Teubner, 2 vol., 1904-1905).

⁵ BUCHERER, A. H. *Elemente der Vector Analysis* (Leipzig, Teubner, 1903, 91 p., 2^{me} édit. 1905, VIII, 138 p.). — *Math. Einführung in die Electronentheorie* (ibid. 1904, 148 p.).

⁶ FISCHER, V. *Vectordifferentiation und Vektorintegration* (Leipzig, Barth, 1904, 82 p.).

⁷ GANS, R. *Einführung in die Vektoranalysis* (Leipzig, Teubner, 1905, 98 p.; 2^{me} édit., 1909, 125 p.).

⁸ VALENTINER, S. *Vektoranalysis* (Leipzig, Sammlung Göschen, 1907, 163 p. in-16).

⁹ V. IGNATOWSKY, W. *Vectoranalysis* (Leipzig, Teubner, 2 vol., 1909, 1910).

¹⁰ Une traduction française de ce livre a été récemment publiée par M. S. LATTÈS, *Eléments de calcul vectoriel* (Paris, Hermann, 1910).

(Massau, Gibbs, Heaviside, Föppl, etc.) : le produit interne est représenté par $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ qui se lit $\mathbf{a}$ interne $\mathbf{b}$; le produit externe par $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ ou $\mathbf{a}$ externe $\mathbf{b}$; le gradient, la divergence et la rotation sont représentés par des notations abrégées grad, div, rot. Le second ouvrage, sur l'homographie, est le développement de la fonction linéaire désignée par la lettre $\mathbf{H}$ au lieu de la lettre φ acceptée par Massau et Gibbs, sans doute en souvenir des quaternions. L'étude n'est pas conduite de la même manière que dans les autres géométries vectorielles. C'est donc une partie originale de la méthode de Burali-Forti et Marcolongo. L'expérience dira si elle est mieux adaptée que l'ancienne aux usages de la pratique.

Récemment, ces deux auteurs ont provoqué une enquête¹ en faveur de l'unification des notations vectorielles : toutes ont été soumises à une critique². Nous donnons plus loin le tableau des principales notations actuellement en usage.

En résumé, le calcul vectoriel qui tend à se répandre est une simplification des méthodes de Grassmann et d'Hamilton. Il est caractérisé par ce fait qu'il n'introduit que les éléments rigoureusement nécessaires pour la résolution des problèmes de géométrie, de mécanique et de physique tels qu'ils sont posés dans l'état actuel de la science. Ces éléments sont de trois sortes :

1^o Les éléments fondamentaux : le vecteur, le produit interne de deux vecteurs qui est un nombre algébrique et le produit externe de deux vecteurs qui est un nouveau vecteur ;

2^o La fonction linéaire appelée dyadique par Gibbs, homographie par Burali-Forti et Marcolongo ;

3^o Les éléments différentiels qui sont le gradient, la divergence et le curl. On pourrait y ajouter dans de nombreuses questions le potentiel, le newtonien, le laplacien et le maxwellien.

Toutes les géométries vectorielles, quelle que soit leur origine, s'accordent sur l'opportunité d'introduire ces éléments. La manière de les relier et de les traiter est, au fond, équivalente ; les divergences n'existent que dans les notations. En voici le tableau :

¹ Voir l'*Enseign. math.* Années 1909 et suiv.

² *Rendiconti del circolo matematico di Palermo*, t. 23, 24, 25, 26.

	vecteur	produit scalaire	produit vectoriel	dyade	gra- dient	diver- gence	curl
W. Gibbs, E. B. Wilson, V. Fischer, J. Coffin ¹	a	a.b	a × b	ab	$\nabla(\text{del})$	$\nabla \cdot = \text{div}$	$\nabla \times = \text{curl}$
J. Massau, A. Demoulin	$\bar{a}$	$\bar{a}\bar{b}$	$M\bar{a}\bar{b}$		$\bar{D}$	—	—
O. Heaviside, A. Föppl, M.-Fr. Daniëls, A. H. Bucherer	α ou A	A.B	A.B		$\nabla(\text{nabla})$ grad	div	curl
M. Abraham	A	A.B	[A.B]		∇	div	curl
W. von Ignatowsky.	$\mathcal{A}$ ou A	A.B	[A.B]	$\mathcal{A};\mathcal{B}$	∇ grad	div	rot
S. Valentiner	A	A.B	[A.B]	$\mathcal{A};\mathcal{B}$	grad	div	curl
H. A. Lorentz.	$\mathcal{A}$ ou A	(A.B)	[A.B]		grad	div	rot
R. Gans.	A	(A.B)	[A.B]		grad	div	rot
C. Burali-Forti, R. Marcolongo	a	a × b	a ∧ b		grad	div	rot

*
* *

Les auteurs qui ont étudié la géométrie de la droite par les divers procédés de calcul dont nous venons de parler sont peu nombreux.

Le premier essai de ce genre est relativement récent : en 1882 M. E. GENTY publiait ² un *Mémoire de géométrie vectorielle sur les complexes du second ordre qui ont un centre de figure*. L'auteur étudie les complexes qu'il appelle « du premier genre » et dont l'équation est de la forme $\mathcal{S}U\mathcal{O}U + \mathcal{S}\mathcal{A}U\mathcal{Y}\mathcal{A}U = 0$; il détermine très simplement plusieurs équations vectorielles et algébriques de la surface de Kummer relative à ces complexes ; il en déduit une construction géométrique de cette surface au moyen de deux quadriques concentriques. Le complexe « du second genre » n'est autre chose que le complexe tétraédral ou de Reye ³.

¹ COFFIN, J. *Vektoranalysis* (New-York, Wiley ; London, Chapman et Hall, 1909).

² GENTY, E. *Journal de math. pures et appl.*, 3^{me} série, VIII, 1882, p. 299-335.

³ GENTY, E. *Sur un complexe du second ordre et sur la question posée au concours de 1881 pour l'agrégation des sciences math.* ; Nouv. ann. 3^{me} série, VI, 1887, p. 401-415.

M. Genty est amené incidemment à l'exposer en résolvant la question posée au concours d'agrégation de 1881. Cependant ces questions de concours lui ont fourni de nombreuses occasions de montrer la simplicité des démonstrations faites par la méthode des quaternions ¹. Cette même méthode a servi plus tard à H. VALENTINER ² pour exposer la géométrie de la droite et à Ch. J. JOLY pour étudier une famille spéciale de complexes quadratiques ³.

Un essai analogue à celui de E. Genty fut tenté à peu près à la même époque en Angleterre par A. BUCHHEIM. Concurrément avec les méthodes de Grassmann, l'auteur fait appel aux biquaternions de W. K. Clifford qui sont une généralisation des biquaternions $q + iq'$ d'Hamilton ; le facteur i est remplacé par un symbole opératoire ω dont le carré peut être égal à $+1, 0$ ou -1 : suivant le cas, on se trouve dans l'espace elliptique, parabolique ou hyperbolique. Les deux articles publiés dans le *Messenger of mathematics* ⁴ esquissent la théorie, dans l'espace parabolique, des complexes et congruences linéaires. La théorie des vis dans l'espace elliptique fait l'objet de quatre autres mémoires ⁵ : ici la droite est représentée par un seul vecteur dont les composantes $x_1, x_2, \dots, x_6$ rappellent les coordonnées de M. F. Klein. Le complexe linéaire prend alors la forme très simple $ax = 0$. L'auteur étudie en outre, par la méthode de Grassmann, les déplacements infiniment petits, puis les déplacements finis dans l'espace à trois dimensions à courbure quelconque : il trouve que tout déplacement fini peut être représenté par un biquaternion. Pour l'extension de ses résultats à l'espace à n dimensions, l'auteur abandonne les biquaternions pour revenir à la méthode de Grassmann.

¹ Voir les *Nouvelles annales*.

² VALENTINER, H. *Application of quaternions to the geometry of straight lines and complexes* ; Kjöb. Ov., 1899 ; 655 p. (D'après une référence du *Bulletin of the international association*, juin 1909, p. 33.)

³ JOLY, Ch. J. : *The quadratic screw-system ; a study of a family of quadratic complexes* ; Transact. Roy. Ir. Acad. vol. 32, 1903-04, p. 155-238. — *The geometry of a three-system of screws*, ibid., p. 239-270.

⁴ BUCHHEIM, A. : *Messenger of math.*, XII, 129-133 ; XIII, 120-124.

⁵ BUCHHEIM, A. : *On the theory of screws in elliptic space* ; Lond. M. S. Proc. XV, 83-98 ; XVI, 15-27 ; XVII, 240-254 ; XVIII, 88-96.

En dehors des quelques résultats trouvés par A. Buchheim l'Ausdehnungslehre n'avait rien fourni à la théorie des complexes. M. E. MÜLLER¹ s'appliqua à combler cette lacune (1891) en donnant, sous une forme concise, de nombreux résultats de la géométrie de la droite : partant de la définition de produit interne et externe des complexes, l'auteur cherche les conditions pour qu'un complexe soit spécial et pour que deux complexes soient en involution ; il termine par un aperçu sur les systèmes complémentaires. A l'école grassmannienne on pourrait peut-être rattacher M. H. E. TIMERDING², si l'auteur ne s'était pas contenté d'exposer la théorie de Grassmann sans l'appliquer au cours de son livre.

Aux procédés de l'Ausdehnungslehre de Grassmann, M. G. COMBEBIAC³ reproche de n'être « pas susceptibles d'une réglementation absolument systématique » ; d'autre part le calcul des quaternions, qui se passe d'axes de coordonnées, a besoin d'une origine ; il « laisse subsister dans les formules des éléments étrangers aux questions traitées ». Aussi M. Combebiac juge-t-il nécessaire d'introduire une nouvelle analyse géométrique se passant de tout système de référence ; dans ce but il propose un système numérique quaternionien à douze unités, le système des triquaternions, qui lui permet de représenter toutes les transformations par similitude de l'espace. Un triquaternion r est « de la forme $q + \omega q_1 + \mu q_2$, où q, q_1, q_2 , sont des quaternions et $1, \omega, \mu$ des unités commutatives avec les unités quaternioniennes » et telles que

$$\omega^2 = 0 \quad \mu^2 = 1 \quad \omega\mu = -\mu\omega = \bar{\omega}.$$

Les règles du calcul des triquaternions introduisent les fonctions G, L, P qui jouent un rôle analogue à celui des fonctions S et V dans le calcul des quaternions. Ces symboles conduisent à des résultats simples et élégants dans les différentes questions de la

¹ MÜLLER, E. : *Die Liniengeometrie nach den Principien der Grassmann'schen Ausdehnungslehre*; Monatshefte, 1891, p. 267-291.

² TIMERDING, H.-E. : *Geometrie der Kräfte* (Leipzig, Teubner, 1908, XI, 381 p.).

³ COMBEBIAC, G. : *Calcul des triquaternions; nouvelle analyse géométrique* (thèse) ; (J. éc. pol. 2^{me} série, 7^{me} cah., 1902, p. 101-219).

géométrie du point, du plan et de la droite. Les déplacements sans déformation amènent l'auteur à étudier les complexes linéaires, dont l'équation $P\gamma d = 0$ rappelle beaucoup celle de M. Buchheim. Cette méthode des triquaternions semble devoir se prêter normalement à une étude élégante du complexe quadratique, à en juger par un exemple que M. Combebiac étudie dans sa thèse.

Mais toute médaille à son revers : si les biquaternions et les triquaternions introduisent beaucoup de simplicité dans l'exposé des questions relatives aux complexes, ces méthodes de calcul sont compliquées ; d'ailleurs elles ne sont pas susceptibles d'une représentation géométrique simple. Cela explique suffisamment pourquoi elles trouvent encore moins de partisans que les méthodes d'Hamilton et de Grassmann.

Le seul travail qui ait été fait, à notre connaissance, sur la géométrie de la droite par les méthodes du calcul vectoriel simplifié est celui de M. A. DEMOULIN : *Mémoire sur l'application d'une méthode vectorielle à l'étude de divers systèmes de droites*. Ce mémoire, couronné au concours de l'enseignement supérieur pour 1890-1891, ne fut publié qu'en 1894 (Bruxelles, Castaigne). Après un exposé sommaire des procédés de calcul de J. Massau, M. Demoulin expose la théorie de la ligne droite en coordonnées vectorielles ; les coordonnées $\bar{u}$ et $\bar{v}$ employées sont les mêmes que les coordonnées u et v de M. Genty : ce sont les vecteurs dont les composantes sont habituellement désignées par XYZ et LMN en mécanique. Vient ensuite une étude approfondie du complexe linéaire : pôle, plan polaire, réduction de l'équation du complexe à la forme normale, droites conjuguées, moment de deux complexes ; propriétés de deux complexes linéaires polaires réciproques par rapport à un troisième ; courbes dont les tangentes appartiennent à un complexe linéaire ou à un complexe quelconque, en particulier à un complexe tétraédral ; congruence commune à deux complexes linéaires ; surface réglée, lieu des droites communes à trois complexes linéaires. Les systèmes de complexes linéaires assujettis à passer par des droites en nombre inférieur à cinq donnent à l'auteur l'occasion d'établir, d'après M. Buchheim, l'équation du cylindroïde de Cayley, puis d'étudier la congruence Γ

et le complexe quadratique C, lieux des axes centraux des complexes linéaires passant respectivement par trois ou deux droites données. Le mémoire se termine par une « étude de quelques complexes dont la considération se déduit de celle du complexe linéaire ». L'appendice sur le complexe de Painvin n'introduit ni la fonction linéaire ni même les vecteurs.

Le présent mémoire a pour but d'exposer en vecteurs un certain nombre de questions de géométrie analytique, en particulier de géométrie réglée. Dans un premier chapitre nous donnons les principes du calcul vectoriel et les propriétés de la fonction linéaire, appelée dyadique. Le chapitre II est consacré aux applications du calcul vectoriel à la géométrie analytique. Le chapitre III traite du complexe linéaire et des systèmes de complexes linéaires. Enfin le chapitre IV donne un aperçu de quelques questions relatives aux complexes quadratiques.

La première idée de ce travail nous a été suggérée par M. le professeur Dr DANIËLS, lequel a bien voulu nous communiquer les notes manuscrites qu'il avait rédigées sur le sujet. Ces notes nous ont été d'un précieux secours pour la géométrie analytique du plan et de la droite, pour la congruence de deux complexes et spécialement pour le complexe linéaire. Dans tout le travail, d'ailleurs, les notations employées sont celles de M. Daniëls. — En ce qui regarde la fonction linéaire nous nous sommes inspirés des travaux de Gibbs-Wilson.

Nous sommes heureux de remercier ici M. le professeur Daniëls qui a bien voulu nous permettre de bénéficier de ses travaux et qui a toujours suivi nos propres recherches avec le plus bienveillant intérêt.

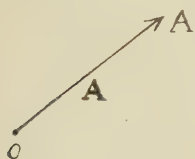


CHAPITRE I

Le calcul vectoriel

I. VECTEURS

On appelle vecteur une grandeur géométrique qui a : 1° une origine et une extrémité; 2° une direction : la droite qui joint l'origine à l'extrémité; 3° un sens : celui d'un mobile allant de l'origine à l'extrémité; 4° un tenseur positif : la mesure de la distance entre l'origine et l'extrémité.



Nous désignerons un vecteur par une lettre grasse; ainsi : vecteur $OA = \mathbf{A}$.

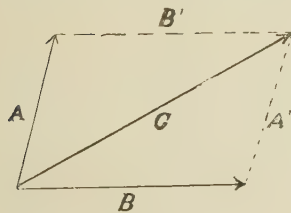
Deux vecteurs sont équipollents ¹ s'ils ont même direction, même sens et même tenseur, les origines pouvant être différentes.

Opérations sur les vecteurs.

1) **Addition.** — Considérons deux vecteurs **A** et **B** ayant même origine **O**. On appelle somme de deux vecteurs et l'on représente par

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$$

un vecteur **C** obtenu en menant par l'extrémité de **A** un vecteur **B'** équipollent à **B** et en joignant l'origine de **A** à l'extrémité de **B'**. A cause des propriétés du parallélogramme, on voit que



$$\mathbf{A} + \mathbf{B}' = \mathbf{B} + \mathbf{A}'$$

ou

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$$

La somme de n vecteurs se fait comme celle de deux : par l'extrémité du premier vecteur on mène un vecteur

¹ Voir G. BELLAVITIS, p. 6 de l'*Exposition de la méthode des équipollences*, traduit de l'italien, par M. Laisant (Paris, Gauthier-Villars, 1874).

équipollent au deuxième, par l'extrémité obtenue un vecteur équipollent au troisième et ainsi de suite.

Il est facile de montrer que la somme de n vecteurs jouit des propriétés d'une somme ordinaire : elle est *commutative*

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} + \dots = \mathbf{A} + \mathbf{C} + \mathbf{B} + \dots$$

et *associative*

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} + \dots = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) + \dots,$$

les parenthèses indiquant ici que l'on remplace deux vecteurs par leur somme effectuée.

2) **Soustraction.** — On appelle différence de deux vecteurs $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ un nouveau vecteur $\mathbf{C}$ qui, ajouté à $\mathbf{B}$ reproduit $\mathbf{A}$; cela revient à ajouter au vecteur $\mathbf{A}$ un vecteur égal à $\mathbf{B}$ en grandeur et en direction mais de sens contraire.

3) **Multiplication :** a) *Par une quantité scalaire.* — Si l'on multiplie un vecteur par un nombre quelconque m son tenseur est multiplié par m ; c'est le cas de la multiplication des nombres ordinaires. Ainsi soit $\mathbf{A}$ un

vecteur dont l'extrémité a pour coordonnées A_1, A_2, A_3 et soient $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ des vecteurs unitaires pris sur les axes, on a :

$$\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}; \quad (1)$$

A_1, A_2, A_3 sont les composantes de $\mathbf{A}$. D'après les propriétés du parallépipède rectangle on a aussi :

$$\text{tenseur de } \mathbf{A} = |\mathbf{A}| = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}. \quad (2)$$

b) *Produit scalaire.* — Le produit scalaire de deux vecteurs $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ s'obtient en multipliant le produit de leurs tenseurs par le cosinus de l'angle θ formé par les deux vecteurs; ainsi :

$$\mathbf{AB} = AB \cos \theta. \quad (3)$$

Ce produit possède, comme on le vérifie aisément, toutes les propriétés d'un produit ordinaire : il est *commutatif*

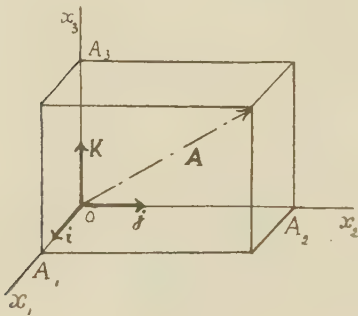
$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} \quad (4)$$

et *distributif*

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}. \quad (5)$$

Il s'ensuit que

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B} + \dots)(\mathbf{A}_1 + \mathbf{B}_1 + \dots) = \mathbf{AA}_1 + \mathbf{AB}_1 + \dots + \mathbf{BA}_1 + \mathbf{BB}_1 + \dots \quad (6)$$



Les vecteurs $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ étant des vecteurs unitaires choisis sur les axes, on a par définition (3) :

$$\begin{aligned} \mathbf{i}\mathbf{i} &= \mathbf{i}^2 = 1 ; \mathbf{j}\mathbf{j} = \mathbf{j}^2 = 1 ; \mathbf{k}\mathbf{k} = \mathbf{k}^2 = 1 \\ \mathbf{j}\mathbf{k} &= \mathbf{k}\mathbf{j} = 0 ; \mathbf{k}\mathbf{i} = \mathbf{i}\mathbf{k} = 0 ; \mathbf{i}\mathbf{j} = \mathbf{j}\mathbf{i} = 0 . \end{aligned} \quad (7)$$

Par suite :

$$\begin{aligned} \mathbf{AB} &= (\mathbf{A}_1\mathbf{i} + \mathbf{A}_2\mathbf{j} + \mathbf{A}_3\mathbf{k})(\mathbf{B}_1\mathbf{i} + \mathbf{B}_2\mathbf{j} + \mathbf{B}_3\mathbf{k}) \\ &= \mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 + \mathbf{A}_2\mathbf{B}_2 + \mathbf{A}_3\mathbf{B}_3 \end{aligned} \quad (8)$$

$$\text{et} \quad \mathbf{AA} = \mathbf{A}^2 = \mathbf{A}_1^2 + \mathbf{A}_2^2 + \mathbf{A}_3^2 . \quad (2)$$

Le produit *scalaire* est nul :

1° Lorsque l'un des vecteurs est nul ;

2° Lorsque les deux vecteurs sont perpendiculaires.

Cette dernière propriété est d'une application constante.

c) *Produit vectoriel*. — On appelle produit vectoriel et l'on désigne par $\mathbf{VAB}$ un vecteur dont le tenseur est le produit $\mathbf{ABsin}\theta$ et dont la direction est telle qu'un observateur traversé des pieds à la tête par $\mathbf{VAB}$ et regardant $\mathbf{A}$ ait $\mathbf{B}$ à sa gauche : on dit que $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{VAB}$ forment un système droit.

On verrait facilement que ce produit jouit de la propriété *distributive*

$$\mathbf{V}(\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C})) = \mathbf{VAB} + \mathbf{VAC} \quad (9)$$

$$\mathbf{V}(\mathbf{A} + \mathbf{B} + \dots)(\mathbf{A}_1 + \mathbf{B}_1 + \dots) = \mathbf{VAA}_1 + \mathbf{VAB}_1 + \dots + \mathbf{VBA}_1 + \mathbf{VBB}_1 + \dots \quad (10)$$

mais d'après la définition ci-dessus, *il n'est pas commutatif* :

$$\mathbf{VAB} = -\mathbf{VBA} . \quad (11)$$

D'après la définition on a aussi :

$$\mathbf{Vii} = \mathbf{Vjj} = \mathbf{Vkk} = 0 ; \quad (12)$$

$$\mathbf{Vjk} = -\mathbf{Vkj} = \mathbf{i} ,$$

$$\mathbf{Vki} = -\mathbf{Vik} = \mathbf{j} , \quad (13)$$

$$\mathbf{Vij} = -\mathbf{Vji} = \mathbf{k} .$$

Des relations (10), (12) et (13) il suit que :

$$\begin{aligned} \mathbf{VAB} &= \mathbf{V}(\mathbf{A}_1\mathbf{i} + \mathbf{A}_2\mathbf{j} + \mathbf{A}_3\mathbf{k})(\mathbf{B}_1\mathbf{i} + \mathbf{B}_2\mathbf{j} + \mathbf{B}_3\mathbf{k}) \\ &= (\mathbf{A}_2\mathbf{B}_3 - \mathbf{A}_3\mathbf{B}_2)\mathbf{i} + (\mathbf{A}_3\mathbf{B}_1 - \mathbf{A}_1\mathbf{B}_3)\mathbf{j} + (\mathbf{A}_1\mathbf{B}_2 - \mathbf{A}_2\mathbf{B}_1)\mathbf{k} , \end{aligned} \quad (14)$$

$$\text{ou} \quad \mathbf{VAB} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}. \quad (15)$$

$$\text{Corollaire. } \mathbf{VAA} = 0. \quad (16)$$

Le produit *vectériel* est nul :

1° Lorsque l'un des vecteurs est nul ;

2° Lorsque les deux vecteurs sont parallèles.

Produit de plus de deux vecteurs.

1) Multiplions scalairement $\mathbf{A}$ par $\mathbf{VBC}$, nous aurons $\mathbf{A} \mathbf{VBC}$ ou $[\mathbf{ABC}]$; on emploiera indifféremment l'une ou l'autre de ces deux notations. Pour effectuer ce produit, faisons usage des formules (14) et (8) ; on trouve :

$$\mathbf{A} \mathbf{VBC} = [\mathbf{ABC}] = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}. \quad (17)$$

Les règles concernant les permutations de lignes dans un déterminant montrent que :

$$[\mathbf{ABC}] = [\mathbf{BCA}] = [\mathbf{CAB}]; \quad (18)$$

$$\text{par contre} \quad [\mathbf{ACB}] = [\mathbf{BAC}] = [\mathbf{CBA}] = -[\mathbf{ABC}]. \quad (19)$$

Comme un déterminant est nul lorsqu'il a deux lignes égales, on a :

$$[\mathbf{AAB}] = 0. \quad (20)$$

Remarque I. — Si les trois vecteurs du produit $[\mathbf{ABC}]$ sont coplanaires, l'un d'entre eux, le troisième, par exemple, peut être décomposé suivant les deux autres, et l'on a un déterminant dont la troisième ligne est la somme de multiples des deux premières ; le déterminant est donc nul de même que le produit $[\mathbf{ABC}]$.

Remarque II. — Si les vecteurs $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ ne sont pas coplanaires, il est aisé de voir que le produit $[\mathbf{ABC}]$ représente six fois le volume du tétraèdre construit sur ces vecteurs.

2) Calculons le produit vectériel $\mathbf{VA} \mathbf{VBC}$; on a d'après (15) et (14) :

$$\begin{aligned} \mathbf{VA} \mathbf{VBC} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_2 C_3 - B_3 C_2 & B_3 C_1 - B_1 C_3 & B_1 C_2 - B_2 C_1 \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{i} [B_1 (A_1 C_1 + A_2 C_2 + A_3 C_3) - C_1 (A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3)] \\ &\quad + \mathbf{j} [B_2 (A_1 C_1 + A_2 C_2 + A_3 C_3) - C_2 (A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3)] \\ &\quad + \mathbf{k} [B_3 (A_1 C_1 + A_2 C_2 + A_3 C_3) - C_3 (A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3)] \end{aligned}$$

ou à cause de (8) et (1)

$$\sqrt{A} \sqrt{BC} = B \cdot AC - C \cdot AB = \begin{vmatrix} B & C \\ AB & AC \end{vmatrix} . \quad (21)$$

$$3) \quad \sqrt{AB} \sqrt{CD} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} i & j & k \\ C_1 & C_2 & C_3 \\ D_1 & D_2 & D_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+1+1 & A & B \\ C & AC & BC \\ D & AD & BD \end{vmatrix} .$$

Développant ce déterminant, on trouve aisément :

$$\sqrt{AB} \sqrt{CD} = (AC \cdot BD - AD \cdot BC) = \begin{vmatrix} AC & AD \\ BC & BD \end{vmatrix} . \quad (22)$$

$$\text{Corollaire I.} \quad (\sqrt{AB})^2 = A^2 \cdot B^2 - (AB)^2 . \quad (23)$$

$$\text{Corollaire II.} \quad \sqrt{AB} \sqrt{CD} = A \sqrt{B} \sqrt{CD} . \quad (24)$$

4) Calculons encore $\sqrt{\sqrt{AB} \sqrt{CD}}$; pour cela considérons $\sqrt{AB}$ comme un seul vecteur et appliquons la formule (21) ; il vient :

$$\sqrt{\sqrt{AB} \sqrt{CD}} = C \cdot [DAB] - D \cdot [CAB] . \quad (25)$$

Vecteurs réciproques.

Soient **A**, **B**, **C** trois vecteurs donnés et **X** un vecteur variable ; on peut décomposer **X** suivant les trois directions données :

$$\mathbf{X} = a\mathbf{A} + b\mathbf{B} + c\mathbf{C}.$$

Pour déterminer les quantités scalaires a, b, c multiplions les deux membres de cette relation scalairement par $\sqrt{BC}$, $\sqrt{CA}$, $\sqrt{AB}$; on en déduit :

$$a = \frac{BCX}{[ABC]} \quad b = \frac{CAX}{[ABC]} \quad c = \frac{ABX}{[ABC]} ,$$

$$\text{d'où :} \quad \mathbf{X} = \mathbf{A} \cdot \frac{BCX}{[ABC]} + \mathbf{B} \cdot \frac{CAX}{[ABC]} + \mathbf{C} \cdot \frac{ABX}{[ABC]} . \quad (26)$$

$$\text{Posons :} \quad \frac{\sqrt{BC}}{[ABC]} = \mathbf{A}' \quad \frac{\sqrt{CA}}{[ABC]} = \mathbf{B}' \quad \frac{\sqrt{AB}}{[ABC]} = \mathbf{C}' ; \quad (27)$$

la relation précédente peut alors s'écrire :

$$\mathbf{X} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}' + \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}' + \mathbf{C} \cdot \mathbf{C}') \mathbf{X} . \quad (28)$$

D'après la définition de $\mathbf{A'}, \mathbf{B'}, \mathbf{C'}$ on a évidemment :

$$\mathbf{AA'} = \mathbf{BB'} = \mathbf{CC'} = 1 \quad (29)$$

et
$$\mathbf{BC'} = \mathbf{CB'} = \mathbf{CA'} = \mathbf{AC'} = \mathbf{AB'} = \mathbf{BA'} = 0. \quad (30)$$

Il est évident que si les trois vecteurs $\mathbf{A, B, C}$ forment un vrai trièdre, les trois vecteurs $\mathbf{A', B', C'}$ formeront aussi un trièdre, le trièdre supplémentaire du premier. Le système des trois vecteurs $\mathbf{A', B', C'}$ est appelé *réciroque* du système $\mathbf{A, B, C}$.

Cela étant, au lieu de décomposer $\mathbf{X}$ suivant $\mathbf{A, B, C}$, cherchons à l'exprimer en fonction de $\mathbf{A', B', C'}$. Pour cela posons :

$$\mathbf{X} = a'\mathbf{A'} + b'\mathbf{B'} + c'\mathbf{C'}$$

et multiplions cette équation scalairement par $\mathbf{A, B, C}$; on obtient, en tenant compte des relations (29) et (30) :

$$a' = \mathbf{AX} \quad b' = \mathbf{BX} \quad c' = \mathbf{CX}$$

d'où :
$$\mathbf{X} = (\mathbf{A' . A} + \mathbf{B' . B} + \mathbf{C' . C})\mathbf{X} \quad (31)$$

D'autre part, en décomposant $\mathbf{X}$ suivant les trois directions $\mathbf{A', B', C'}$, on trouve :

$$\mathbf{X} = \mathbf{A' . \frac{[B'C'X]}{[A'B'C']}} + \mathbf{B' . \frac{[C'A'X]}{[A'B'C']}} + \mathbf{C' . \frac{[A'B'X]}{[A'B'C']}},$$

et, si l'on compare cette relation à la précédente (31), on voit que :

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{[B'C']}}{\mathbf{[A'B'C']}} \quad \mathbf{B} = \frac{\mathbf{[C'A']}}{\mathbf{[A'B'C']}} \quad \mathbf{C} = \frac{\mathbf{[A'B']}}{\mathbf{[A'B'C']}} \quad (32)$$

d'où le *théorème* :

Si le système $\mathbf{A', B', C'}$ est réciroque de $\mathbf{A, B, C}$, inversement $\mathbf{A, B, C}$ est réciroque de $\mathbf{A', B', C'}$.

Corollaire. — Le système $\mathbf{i, j, k}$ est à lui-même son réciroque.

Théorème. — Les quantités scalaires $\mathbf{[ABC]}$ et $\mathbf{[A'B'C']}$ sont inverses l'une de l'autre, car

$$\begin{aligned} \mathbf{A'B'C'} &= \left[\begin{array}{ccc} \mathbf{[BC]} & \mathbf{[CA]} & \mathbf{[AB]} \\ \mathbf{[ABC]} & \mathbf{[ABC]} & \mathbf{[ABC]} \end{array} \right] = \frac{1}{\mathbf{[ABC]^3}} \{ \mathbf{[BC] . A . BCA} - \mathbf{B . [ACA]} \} \\ &= \frac{\mathbf{[ABC]^2}}{\mathbf{[ABC]^3}} = \frac{1}{\mathbf{[ABC]}} \quad (33) \end{aligned}$$

La formule (28) tombe en défaut lorsque $[\mathbf{ABC}] = 0$, car alors les vecteurs $\mathbf{A}', \mathbf{B}', \mathbf{C}'$ deviennent infinis. Dans ce cas, supposons $\sqrt{\mathbf{AB}} \neq 0$ et décomposons le vecteur $\mathbf{X}$ suivant les trois vecteurs non-coplanaires $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \sqrt{\mathbf{AB}}$; soit

$$\mathbf{X} = a\mathbf{A} + b\mathbf{B} + c\sqrt{\mathbf{AB}}.$$

Pour déterminer a, b, c multiplions les deux membres scalairement par $\sqrt{\mathbf{B}\sqrt{\mathbf{AB}}}$, $\sqrt{\mathbf{A}\sqrt{\mathbf{BA}}}$ et $\sqrt{\mathbf{AB}}$; on trouve aisément :

$$a = \frac{\mathbf{X}\sqrt{\mathbf{B}\sqrt{\mathbf{AB}}}}{(\sqrt{\mathbf{AB}})^2} \quad b = \frac{\mathbf{X}\sqrt{\mathbf{A}\sqrt{\mathbf{BA}}}}{(\sqrt{\mathbf{AB}})^2} \quad c = \frac{\mathbf{X}\sqrt{\mathbf{AB}}}{(\sqrt{\mathbf{AB}})^2}$$

$$\text{d'où : } \mathbf{X} = \mathbf{A} \cdot \frac{\mathbf{X}\sqrt{\mathbf{B}\sqrt{\mathbf{AB}}}}{(\sqrt{\mathbf{AB}})^2} + \mathbf{B} \cdot \frac{\mathbf{X}\sqrt{\mathbf{A}\sqrt{\mathbf{BA}}}}{(\sqrt{\mathbf{AB}})^2} + \sqrt{\mathbf{AB}} \cdot \frac{\mathbf{X}\sqrt{\mathbf{AB}}}{(\sqrt{\mathbf{AB}})^2}. \quad (34)$$

Posons de nouveau :

$$\frac{\sqrt{\mathbf{B}\sqrt{\mathbf{AB}}}}{(\sqrt{\mathbf{AB}})^2} = \mathbf{A}', \quad \frac{\sqrt{\mathbf{A}\sqrt{\mathbf{BA}}}}{(\sqrt{\mathbf{AB}})^2} = \mathbf{B}', \quad \frac{\sqrt{\mathbf{AB}}}{(\sqrt{\mathbf{AB}})^2} = (\sqrt{\mathbf{AB}})'; \quad (35)$$

il vient :

$$\mathbf{X} = \{ \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}' + \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}' + \sqrt{\mathbf{AB}} \cdot (\sqrt{\mathbf{AB}})' \} \mathbf{X}. \quad (36)$$

De même que plus haut ces vecteurs sont encore liés par les relations :

$$\begin{aligned} \mathbf{AA}' &= \mathbf{BB}' = \sqrt{\mathbf{AB}}(\sqrt{\mathbf{AB}})' = 1 \\ \mathbf{AB}' &= \mathbf{BA}' = \dots\dots\dots = 0. \end{aligned} \quad (37)$$

Si l'on décompose $\mathbf{X}$ suivant $\mathbf{A}', \mathbf{B}'$ et $(\sqrt{\mathbf{AB}})'$ on trouve encore

$$\mathbf{X} = \{ \mathbf{A}' \cdot \mathbf{A} + \mathbf{B}' \cdot \mathbf{B} + (\sqrt{\mathbf{AB}})' \cdot \sqrt{\mathbf{AB}} \} \mathbf{X} \quad (38)$$

$$\text{et } \mathbf{A} = \frac{\sqrt{\mathbf{B}\sqrt{\mathbf{A}'\mathbf{B}'}}}{(\sqrt{\mathbf{A}'\mathbf{B}'})^2} \quad \mathbf{B} = \frac{\sqrt{\mathbf{A}\sqrt{\mathbf{B}'\mathbf{A}'}}}{(\sqrt{\mathbf{A}'\mathbf{B}'})^2} \quad \sqrt{\mathbf{AB}} = \frac{\sqrt{\mathbf{A}'\mathbf{B}'}}{(\sqrt{\mathbf{A}'\mathbf{B}'})^2}. \quad (39)$$

Par suite le système $\mathbf{A}', \mathbf{B}', (\sqrt{\mathbf{AB}})'$ est le réciproque de $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \sqrt{\mathbf{AB}}$. On démontrerait facilement que

$$|\sqrt{\mathbf{A}'\mathbf{B}'}| = \frac{1}{|\sqrt{\mathbf{AB}}|}. \quad (40)$$

Mais il peut arriver que le vecteur $\mathbf{X}$, que l'on décompose, soit situé dans le plan de $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$, c'est-à-dire que $[\mathbf{ABX}] = 0$. Dans ce cas $c = 0$, et l'on a simplement :

$$\mathbf{X} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}' + \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}') \mathbf{X} \quad (36')$$

ou
$$\mathbf{X} = (\mathbf{A}' \cdot \mathbf{A} + \mathbf{B}' \cdot \mathbf{B}) \mathbf{X} . \quad (38')$$

Enfin il peut arriver que $\sqrt{\mathbf{AB}} = 0$; dans ce cas le réciproque $\mathbf{A}'$ de $\mathbf{A}$ sera simplement

$$\mathbf{A}' = \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{A}^2} ; \quad (41)$$

mais on a encore

$$\mathbf{AA}' = 1 \quad (42)$$

et

$$|\mathbf{A}'| = \frac{1}{|\mathbf{A}|} ; \quad (42')$$

de plus

$$\mathbf{X} = (\mathbf{A}' \cdot \mathbf{A}) \mathbf{X} \quad (43')$$

car

$$\sqrt{\mathbf{AX}} = 0 .$$

Equations du premier degré.

On appelle équation en $\mathbf{X}$ une égalité qui n'est vraie que pour certaines valeurs attribuées à $\mathbf{X}$: ces valeurs sont les racines de l'équation. Si une telle équation

$$f(\mathbf{X}) = 0$$

peut se ramener à la forme

$$f_s(\mathbf{X}) + f_v(\mathbf{X}) = 0$$

où f_s et f_v ne renferment respectivement que des termes scalaires ou vectoriels, cette équation ne peut être vérifiée que si l'on a séparément $f_s(\mathbf{X}) = 0$ et $f_v(\mathbf{X}) = 0$.

Il y a donc lieu de distinguer les équations *scalaires* et *vectorielles*.

1) **Equations scalaires.** — Une telle équation est, par exemple, de la forme :

$$a\sqrt{\mathbf{BX}} + b\sqrt{\mathbf{CD}}\sqrt{\mathbf{EX}} + c\mathbf{FX} + d = 0 ;$$

elle est dite linéaire lorsque chaque terme ne contient qu'une fois $\mathbf{X}$. Cette équation peut évidemment s'écrire :

$$(a\sqrt{\mathbf{AB}} - b\sqrt{\mathbf{E}}\sqrt{\mathbf{CD}} + c\mathbf{F})\mathbf{X} + d = 0 .$$

Elle peut donc se ramener à la forme

$$\mathbf{AX} = a .$$

Comme on le verra plus loin, cette équation représente un plan, qui, par suite, admet pour $\mathbf{X}$ une infinité (∞^2) de solutions. On sait (43) que

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}' \cdot \mathbf{A} \mathbf{X}$$

d'où

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= a \mathbf{A}' \\ &= \frac{a}{\mathbf{A}^2} \mathbf{A} ; \end{aligned}$$

c'est une solution particulière : le pied de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur le plan ; la solution générale sera

$$\mathbf{X} = \frac{a}{\mathbf{A}^2} \mathbf{A} + \sqrt{\mathbf{A} \mathbf{P}} ,$$

$\mathbf{P}$ désignant un vecteur quelconque.

Un cas plus intéressant est celui où $\mathbf{X}$ doit satisfaire à deux équations

$$\mathbf{A} \mathbf{X} = a \quad \text{et} \quad \mathbf{B} \mathbf{X} = b ;$$

d'après (38') on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= (\mathbf{A}' \cdot \mathbf{A} + \mathbf{B}' \cdot \mathbf{B}) \mathbf{X} \\ &= a \mathbf{A}' + b \mathbf{B}' \\ &= \frac{1}{(\sqrt{\mathbf{A} \mathbf{B}})^2} (a \sqrt{\mathbf{B}} \sqrt{\mathbf{A} \mathbf{B}} + b \sqrt{\mathbf{A}} \sqrt{\mathbf{B} \mathbf{A}}) ; \end{aligned}$$

c'est une solution particulière, désignons-la par $\mathbf{X}_0$; la solution générale sera de la forme

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 + \lambda \sqrt{\mathbf{A} \mathbf{B}} ;$$

λ désignant une quantité scalaire quelconque.

Mais le vecteur $\mathbf{X}$ sera, en général bien déterminé par trois équations

$$\mathbf{A} \mathbf{X} = a , \quad \mathbf{B} \mathbf{X} = b , \quad \mathbf{C} \mathbf{X} = c ;$$

pour trouver la racine $\mathbf{X}$ supposons $[\mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{C}] \neq 0$; on a (31) :

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= (\mathbf{A}' \cdot \mathbf{A} + \mathbf{B}' \cdot \mathbf{B} + \mathbf{C}' \cdot \mathbf{C}) \mathbf{X} \\ \mathbf{X} &= a \mathbf{A}' + b \mathbf{B}' + c \mathbf{C}' . \end{aligned}$$

C'est le sommet du trièdre formé par les trois plans donnés.

2) **Equations vectorielles.** — Une équation vectorielle en $\mathbf{X}$ est dite du premier degré lorsque le vecteur inconnu $\mathbf{X}$ ne figure qu'une fois dans chaque terme.

Une telle équation peut se ramener à l'une des formes :

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{L} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{M} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{N}) \mathbf{X} = \mathbf{D} , \tag{I}$$

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{L} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{M}) \mathbf{X} = \mathbf{D} , \tag{II}$$

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{L}) \mathbf{X} = \mathbf{D} . \tag{III}$$

a) Soit à résoudre l'équation

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{L} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{M} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{N}) \mathbf{X} = \mathbf{D} . \quad (\text{I})$$

Supposons $[\mathbf{ABC}] \neq 0$ et multiplions les deux membres de (I) par $\mathbf{A}', \mathbf{B}', \mathbf{C}'$; on a, (29) et (30) :

$$\mathbf{LX} = \mathbf{DA}' , \quad \mathbf{MX} = \mathbf{DB}' , \quad \mathbf{NX} = \mathbf{DC}' .$$

Cela étant, supposons $[\mathbf{LMN}] \neq 0$; on peut écrire (31) :

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= (\mathbf{L}' \cdot \mathbf{L} + \mathbf{M}' \cdot \mathbf{M} + \mathbf{N}' \cdot \mathbf{N}) \mathbf{X} \\ &= \mathbf{L}' \cdot \mathbf{DA}' + \mathbf{M}' \cdot \mathbf{DB}' + \mathbf{N}' \cdot \mathbf{DC}' \end{aligned}$$

$$\text{ou} \quad \mathbf{X} = \frac{1}{[\mathbf{ABC}] [\mathbf{LMN}]} ([\mathbf{DBC}] \cdot \sqrt{\mathbf{MN}} + [\mathbf{DCA}] \cdot \sqrt{\mathbf{NL}} + [\mathbf{DAB}] \cdot \sqrt{\mathbf{LM}}) .$$

$$b) \text{ Résoudre } (\mathbf{A} \cdot \mathbf{L} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{M}) \mathbf{X} = \mathbf{D} ; \quad (\text{II})$$

pour que cette équation soit possible, il faut évidemment $[\mathbf{ABD}] = 0$; supposons cette condition remplie et supposons en outre $\sqrt{\mathbf{AB}} \neq 0$. Si l'on désigne par $\mathbf{X}_0$ une solution particulière de cette équation il est clair que

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 + \lambda \sqrt{\mathbf{LM}} ,$$

où λ est une quantité scalaire quelconque, sera la solution générale de l'équation proposée. Tout revient donc à trouver une solution particulière $\mathbf{X}_0$.

Multiplions (II) scalairement par $\mathbf{A}'$ et $\mathbf{B}'$ (vecteurs définis par la relation (35)); on a (37) :

$$\mathbf{LX}_0 = \mathbf{DA}' \quad \mathbf{MX}_0 = \mathbf{DB}' .$$

D'autre part supposons $\sqrt{\mathbf{LM}} \neq 0$; on a (38)' :

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= (\mathbf{L}' \cdot \mathbf{L} + \mathbf{M}' \cdot \mathbf{M}) \mathbf{X}_0 \\ &= \mathbf{L}' \cdot \mathbf{DA}' + \mathbf{M}' \cdot \mathbf{DB}' \\ &= \frac{1}{(\sqrt{\mathbf{AB}})^2 (\sqrt{\mathbf{LM}})^2} (\sqrt{\mathbf{M}} \sqrt{\mathbf{LM}} \cdot \sqrt{\mathbf{DB}} \sqrt{\mathbf{AB}} - \sqrt{\mathbf{L}} \sqrt{\mathbf{ML}} \cdot \sqrt{\mathbf{DA}} \sqrt{\mathbf{BA}}) . \end{aligned}$$

Cette solution particulière connue, on a facilement la solution générale.

Remarque. — Le vecteur $\mathbf{X}$ ci-dessus renferme une constante arbitraire : on dit qu'il a un degré de liberté. S'il était assujéti en outre à vérifier l'équation scalaire $\mathbf{PX} = p$ qui a deux degrés de liberté, il serait complètement déterminé. On a :

$$p = \mathbf{PX}_0 + \lambda [\mathbf{PLM}]$$

d'où

$$\lambda = \frac{p - \mathbf{PX}_0}{[\mathbf{PLM}]}$$

et

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 + \frac{\mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{X}_0}{[\mathbf{P}\mathbf{L}\mathbf{M}]} \sqrt{\mathbf{L}\mathbf{M}} .$$

c) Résoudre

$$\mathbf{A}.\mathbf{L}\mathbf{X} = \mathbf{D} . \quad (\text{III})$$

Supposons $\sqrt{\mathbf{A}\mathbf{D}} = 0$ et $\mathbf{A} \neq 0$. Multiplions (III) par $\mathbf{A}' = \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{A}^2}$;

on a :

$$\mathbf{L}\mathbf{X} = \mathbf{D}\mathbf{A}' .$$

Si $\mathbf{L} \neq 0$, on a aussi :

$$\mathbf{X} = \mathbf{L}'.\mathbf{L}\mathbf{X}$$

ou

$$= \mathbf{L}'.\mathbf{D}\mathbf{A}'$$

$$= \frac{\mathbf{D}\mathbf{A}}{\mathbf{A}^2.\mathbf{L}^2} \mathbf{L} .$$

Le vecteur $\mathbf{X}$ ainsi trouvé est une solution particulière, désignons-la par $\mathbf{X}_0$; la solution générale est donnée par la formule

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 + \sqrt{\mathbf{L}\mathbf{P}} ,$$

$\mathbf{P}$ désignant un vecteur arbitraire.

A titre d'exercice résolvons quelques équations qui se présentent plus souvent dans la pratique.

$$1) \quad \mathbf{A}.\mathbf{L}\mathbf{X} + \mathbf{B}.\mathbf{M}\mathbf{X} + m\mathbf{X} = \mathbf{D} \quad (m \text{ scalaire})$$

$$\text{on a (38) :} \quad \mathbf{X} = \{ \mathbf{A}.\mathbf{A}' + \mathbf{B}.\mathbf{B}' + \sqrt{\mathbf{A}\mathbf{B}}.(\sqrt{\mathbf{A}\mathbf{B}})' \} \mathbf{X}$$

$$\text{d'où} \quad \left\{ \mathbf{A} . (\mathbf{L} + m\mathbf{A}') + \mathbf{B} . (\mathbf{M} + m\mathbf{B}') + m\sqrt{\mathbf{A}\mathbf{B}} . \frac{\sqrt{\mathbf{A}\mathbf{B}}}{(\sqrt{\mathbf{A}\mathbf{B}})^2} \right\} \mathbf{X} = \mathbf{D} ;$$

on est ainsi ramené au premier cas.

$$2) \quad \mathbf{A}.\mathbf{L}\mathbf{X} + m\mathbf{X} = \mathbf{D}$$

on peut écrire :

$$\mathbf{A}(\mathbf{i}.\mathbf{i} + \mathbf{j}.\mathbf{j} + \mathbf{k}.\mathbf{k}).\mathbf{L}\mathbf{X} + m\mathbf{X}(\mathbf{i}.\mathbf{i} + \mathbf{j}.\mathbf{j} + \mathbf{k}.\mathbf{k}) = \mathbf{D}$$

$$\text{ou} \quad \{ \mathbf{i} . (\mathbf{A}\mathbf{i}.\mathbf{L} + m\mathbf{i}) + \mathbf{j} . (\mathbf{A}\mathbf{j}.\mathbf{L} + m\mathbf{j}) + \mathbf{k} . (\mathbf{A}\mathbf{k}.\mathbf{L} + m\mathbf{k}) \} \mathbf{X} = \mathbf{D} ;$$

on est encore ramené au premier cas.

II. DYADIQUES

Soit
$$\mathbf{Y} = \mathbf{A.LX} + \mathbf{B.MX} + \mathbf{C.NX} \quad (44)$$

une équation linéaire vectorielle ; désignons par $\Phi\mathbf{X}$ le second membre de cette équation et posons :

$$\Phi = \mathbf{A.L} + \mathbf{B.M} + \mathbf{C.N} ; \quad (45)$$

l'opérateur Φ est une *dyadique* * : $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ sont les antécédents, $\mathbf{L}, \mathbf{M}, \mathbf{N}$ les conséquents de la dyadique. L'équation (44) peut alors s'écrire

$$\mathbf{Y} = \Phi\mathbf{X} . \quad (46)$$

Géométriquement, à tout vecteur $\mathbf{X}$, la dyadique Φ fait correspondre un vecteur $\mathbf{Y}$ défini par rapport au trièdre $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$. D'ailleurs si l'on opère sur un vecteur $\mathbf{X}$ satisfaisant à l'équation $f_n(\mathbf{X}) = 0$ d'une surface de degré n , la transformée

$$F(\mathbf{X}) = f(\Phi\mathbf{X}) = 0$$

ne change pas de degré ; la dyadique Φ définit une transformation homographique.

Décomposons les antécédents et les conséquents de Φ suivant $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ et posons

$$A_i L_k + B_i M_k + C_i N_k = a_{ik} ; \quad (47)$$

il vient

$$\begin{aligned} \Phi = & a_{11} \mathbf{i.i} + a_{12} \mathbf{i.j} + a_{13} \mathbf{i.k} \\ & + a_{21} \mathbf{j.i} + a_{22} \mathbf{j.j} + a_{23} \mathbf{j.k} \\ & + a_{31} \mathbf{k.i} + a_{32} \mathbf{k.j} + a_{33} \mathbf{k.k} . \end{aligned} \quad (48)$$

La dyadique est ramenée à la forme *nonion* **.

Le déterminant

$$| a_{ik} |$$

est le module de la transformation ; avec Gibbs nous l'appellerons souvent Φ_3 de sorte que

$$| a_{ik} | = \Phi_3 . \quad (49)$$

* E. B. WILSON : *Vector analysis*, p. 265.

** WILSON : *Op. cit.*, p. 269.

Il est évident d'après (47) et (48) que

$$|a_{ik}| = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} L_1 & L_2 & L_3 \\ M_1 & M_2 & M_3 \\ N_1 & N_2 & N_3 \end{vmatrix} = [\mathbf{ABC}] [\mathbf{LMN}] . \quad (50)$$

Lorsque $\Phi_3 \neq 0$ la dyadique Φ est *complète*.

Mais il peut très bien arriver que $\Phi_3 = 0$, par exemple lorsque $[\mathbf{ABC}] = 0$. Dans ce cas, on peut écrire

$$\mathbf{C} = \lambda \mathbf{A} + \mu \mathbf{B}$$

$$\text{d'où} \quad \Phi = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{L} + \lambda \mathbf{N}) + \mathbf{B} \cdot (\mathbf{M} + \mu \mathbf{N}) ;$$

c'est une dyadique *planaire* qui est de la forme

$$\Phi = \mathbf{A} \cdot \mathbf{L} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{M} . \quad (51)$$

Son déterminant Φ_3 est évidemment nul, à cause de (50). Tout vecteur sur lequel on opère par cette dyadique est ramené dans le plan de $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$, ou de $(\mathbf{L}, \mathbf{M})$. Soit $|A_{ik}|$ le déterminant adjoint de $|a_{ik}|$; supposons que les mineurs A_{11}, A_{21}, A_{31} ne soient pas tous nuls; on a :

$$A_{11}Y_1 + A_{21}Y_2 + A_{31}Y_3 = X_1 \Phi_3 = 0 ,$$

c'est-à-dire que $\mathbf{Y}$ est perpendiculaire au vecteur

$$A_{11}\mathbf{i} + A_{21}\mathbf{j} + A_{31}\mathbf{k} .$$

En particulier si $\sqrt[\vee]{\mathbf{AB}}\sqrt[\vee]{\mathbf{LM}} = 0$, les deux plans de la dyadique coïncident : elle est *uniplanaire*. Mais alors

$$\mathbf{Z} = \mathbf{X}\Phi$$

est perpendiculaire au vecteur

$$A_{11}\mathbf{i} + A_{12}\mathbf{j} + A_{13}\mathbf{k} .$$

Comme Φ est uniplanaire, $\mathbf{Y}$ et $\mathbf{Z}$ doivent être perpendiculaires au *même* vecteur, ce qui entraîne $A_{ik} = A_{ki}$.

Enfin si $\Phi_3 = 0$ et $\sqrt[\vee]{\mathbf{AB}} = 0$, Φ peut se ramener à la forme

$$\Phi = \mathbf{A} \cdot \mathbf{L} ; \quad (52)$$

la dyadique est *linéaire*; dans ce cas son déterminant est nul avec tous ses mineurs du premier ordre*. Si, en outre, $\sqrt[\vee]{\mathbf{AL}} = 0$, la dyadique est *unilinéaire* et $a_{ik} = a_{ki}$.

* La démonstration est analogue à celle qui a été faite dans le cas des dyadiques planaires.

Dyadique inverse. — Dans la résolution des équations nous avons vu que si $\mathbf{Y}$ est donné et si $\Phi_3 \neq 0$, le vecteur $\mathbf{X}$, racine de l'équation

$$\Phi \mathbf{X} = \mathbf{Y} \quad (53)$$

est un vecteur fini et bien déterminé; on le représente par :

$$\mathbf{X} = \Phi^{-1} \mathbf{Y} \quad (54)$$

$$\text{où} \quad \Phi^{-1} = \mathbf{L}' \cdot \mathbf{A}' + \mathbf{M}' \cdot \mathbf{B}' + \mathbf{N}' \cdot \mathbf{C}' ; \quad (55)$$

Φ^{-1} est appelée l'*inverse* de Φ .

Opérant sur (53) par Φ^{-1} et sur (54) par Φ on a :

$$\begin{aligned} \Phi^{-1} \Phi \mathbf{X} &= \Phi^{-1} \mathbf{Y} = \mathbf{I} \mathbf{X} = \mathbf{X} & \text{d'où} & \quad \Phi^{-1} \Phi = \mathbf{I} \\ \Phi \Phi^{-1} \mathbf{Y} &= \Phi \mathbf{X} = \mathbf{I} \mathbf{Y} = \mathbf{Y} & \text{d'où} & \quad \Phi \Phi^{-1} = \mathbf{I} \end{aligned} \quad (56)$$

Les dyadiques $\mathbf{I}$, appelées idemfacteurs*, sont de la forme

$$\mathbf{I} = \mathbf{A}' \cdot \mathbf{A} + \mathbf{B}' \cdot \mathbf{B} + \mathbf{C}' \cdot \mathbf{C} \quad (57)$$

$$\text{ou} \quad \mathbf{I} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}' + \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}' + \mathbf{C} \cdot \mathbf{C}' .$$

Dyadique adjointe. — Proposons-nous d'effectuer le produit vectoriel

$$\nabla \Phi \mathbf{X} \Phi \mathbf{Y} ;$$

$$\begin{aligned} \text{on a : } \nabla \Phi \mathbf{X} \Phi \mathbf{Y} &= \nabla (\mathbf{A} \cdot \mathbf{L} \mathbf{X} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{M} \mathbf{X} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{N} \mathbf{X}) (\mathbf{A} \cdot \mathbf{L} \mathbf{Y} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{M} \mathbf{Y} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{N} \mathbf{Y}) \\ &= \Sigma (\mathbf{M} \mathbf{X} \cdot \mathbf{N} \mathbf{Y} - \mathbf{N} \mathbf{X} \cdot \mathbf{M} \mathbf{Y}) \nabla \mathbf{B} \mathbf{C} \\ &= \Sigma \nabla \mathbf{B} \mathbf{C} \cdot \nabla \mathbf{M} \mathbf{N} \cdot \nabla \mathbf{X} \mathbf{Y} . \end{aligned}$$

Avec Gibbs posons :

$$\Phi_2 = \Sigma (\nabla \mathbf{B} \mathbf{C} \cdot \nabla \mathbf{M} \mathbf{N}) = \nabla \mathbf{B} \mathbf{C} \cdot \nabla \mathbf{M} \mathbf{N} + \nabla \mathbf{C} \mathbf{A} \cdot \nabla \mathbf{N} \mathbf{L} + \nabla \mathbf{A} \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{L} \mathbf{M} ;$$

$$\text{il vient :} \quad \nabla \Phi \mathbf{X} \Phi \mathbf{Y} = \Phi_2 \nabla \mathbf{X} \mathbf{Y} . \quad (58)$$

Pour mettre la dyadique Φ_2 sous la forme nonion, appliquons les résultats trouvés plus haut (48) ; il vient :

$$\begin{aligned} \Phi_2 &= A_{11} \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} + A_{12} \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} + A_{13} \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} \\ &\quad + A_{21} \mathbf{j} \cdot \mathbf{i} + A_{22} \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} + A_{23} \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} \\ &\quad + A_{31} \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} + A_{32} \mathbf{k} \cdot \mathbf{j} + A_{33} \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} . \end{aligned} \quad (59)$$

Le module $|A_{ik}|$ de Φ_2 est donc le déterminant adjoint de $|a_{ik}|$, d'où le nom de *dyadique adjointe* que nous donnons à Φ_2 .

* WILSON : *op. cit.*, p. 288.

Corollaire I. — On verrait facilement, en procédant comme ci-dessus, que :

$$\backslash \Phi_2 \mathbf{X} \Phi_2 \mathbf{Y} = \Phi_3 . \Phi \backslash \mathbf{X} \mathbf{Y} . \quad (60)$$

Corollaire II. — $[\Phi \mathbf{X} \Phi \mathbf{Y} \Phi \mathbf{Z}] = \Phi_3 . [\mathbf{X} \mathbf{Y} \mathbf{Z}] . \quad (61)$

Opérations sur les dyadiques. — D'après la définition de $\Phi \mathbf{X}$, on voit que, si l'on remplace $\mathbf{X}$ par $m\mathbf{X}$, m étant scalaire, on a :

$$\Phi(m\mathbf{X}) = m\Phi\mathbf{X} \quad (62)$$

de même $\Phi(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) = \Phi\mathbf{X} + \Phi\mathbf{Y} . \quad (63)$

Si dans $\mathbf{Y} = \Phi\mathbf{X} ,$

on pose $\mathbf{X} = \Phi\mathbf{Z}$

on aura $\mathbf{Y} = \Phi(\Phi\mathbf{Z}) \equiv \Phi^2\mathbf{Z} ;$

par suite $\Phi\Phi = \Phi^2 ;$

de même $\Phi\Phi\Phi = \Phi\Phi^2 = \Phi^3$

et ainsi de suite.

Ces relations permettent de construire des fonctions algébriques et transcendantes de Φ , à condition de définir les fonctions transcendantes $\sin \Phi$, $\cos \Phi$, e^Φ ... par leurs développements en série *. Ces fonctions obéissent à toutes les règles du calcul algébrique.

Valeur scalaire et vectorielle d'une dyadique. — Si l'on multiplie scalairement les antécédents et les conséquents d'une dyadique, le résultat obtenu est par définition la valeur scalaire de la dyadique : on la désigne par Φ_s ; ainsi :

$$\Phi_s = \mathbf{A}\mathbf{L} + \mathbf{B}\mathbf{M} + \mathbf{C}\mathbf{N} \quad (64)$$

ou $\Phi_s = a_{11} + a_{22} + a_{33} .$

De même $\Phi_{2s} = \backslash \mathbf{B} \mathbf{C} \backslash \mathbf{M} \mathbf{N} + \backslash \mathbf{C} \mathbf{A} \backslash \mathbf{N} \mathbf{L} + \backslash \mathbf{A} \mathbf{B} \backslash \mathbf{L} \mathbf{M} \quad (65)$

ou $\Phi_{2s} = A_{11} + A_{22} + A_{33} .$

* J. MASSAU. *Cours de mécanique*, p. 295. — W. GIBBS. *Vect. An.*, Sc. Pap., II. p. 78 et suiv. — E. CARVALLO : *Sur les systèmes linéaires* (Monatshefte, 1891, II, p. 187 et suiv.).

Si l'on multiplie vectoriellement les antécédents et les conséquents d'une dyadique, on obtient, par définition sa valeur vectorielle Φ_v :

$$\Phi_v = \mathbf{V} \mathbf{A} \mathbf{L} + \mathbf{V} \mathbf{B} \mathbf{M} + \mathbf{V} \mathbf{C} \mathbf{N} = (a_{23} - a_{32}) \mathbf{i} + (a_{31} - a_{13}) \mathbf{j} + (a_{12} - a_{21}) \mathbf{k} . \quad (66)$$

De même

$$\Phi_{2v} = \Sigma \mathbf{V} \mathbf{B} \mathbf{C} \mathbf{V} \mathbf{M} \mathbf{N} = (A_{23} - A_{32}) \mathbf{i} + (A_{31} - A_{13}) \mathbf{j} + (A_{12} - A_{21}) \mathbf{k} . \quad (67)$$

Dyadique conjuguée. — La dyadique Φ_c est conjuguée de Φ si

$$\mathbf{X} \Phi \mathbf{Y} = \mathbf{Y} \Phi_c \mathbf{X} .$$

Si Φ est donnée par l'expression (45), sa conjuguée est évidemment

$$\Phi_c = \mathbf{L} . \mathbf{A} + \mathbf{M} . \mathbf{B} + \mathbf{N} . \mathbf{C} .$$

D'ailleurs Φ est aussi la conjuguée de Φ_c , c'est-à-dire que :

$$\Phi_{cc} = \Phi . \quad (68)$$

D'après cela, il est aisé de voir que

$$\Phi^{-1} = \frac{\Phi_{2c}}{\Phi_3} . \quad (69)$$

Cette expression, mise sous la forme nonion, devient :

$$\begin{aligned} & A_{11} \mathbf{i} . \mathbf{i} + A_{21} \mathbf{i} . \mathbf{j} + A_{31} \mathbf{i} . \mathbf{k} \\ & + A_{12} \mathbf{j} . \mathbf{i} + A_{22} \mathbf{j} . \mathbf{j} + A_{32} \mathbf{j} . \mathbf{k} \\ & + A_{13} \mathbf{k} . \mathbf{i} + A_{23} \mathbf{k} . \mathbf{j} + A_{33} \mathbf{k} . \mathbf{k} \\ \Phi^{-1} = & \frac{\quad}{|a_{ik}|} . \end{aligned} \quad (70)$$

En particulier, si, quels que soient $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$, on a $\Phi = \Phi_c$, la dyadique Φ est auto-conjuguée; cela entraîne évidemment $a_{ik} = a_{ki}$ et $A_{ik} = A_{ki}$: ces conditions sont remplies par les dyadiques uniplanaire et unilinéaire.

Par contre, si $\Phi = -\Phi_c$, la dyadique est égale et contraire à sa conjuguée.

Théorème I. — Toute dyadique peut être décomposée en deux autres, dont l'une est *auto-conjuguée*; et l'autre égale et contraire à sa conjuguée.

$$\text{En effet} \quad \Phi = \frac{\Phi + \Phi_c}{2} + \frac{\Phi - \Phi_c}{2} ; \quad (71)$$

les deux dyadiques du second membre satisfont aux conditions posées, ce qui démontre la proposition.

Théorème II. — Démontrer que $(\Phi - \Phi_c)\mathbf{X} = -\nabla\Phi_v\mathbf{X}$.

On a :

$$\begin{aligned} (\Phi - \Phi_c)\mathbf{X} &= \Sigma(\mathbf{A}.\mathbf{LX} - \mathbf{L}.\mathbf{AX}) \\ &= \Sigma\mathbf{X}\mathbf{A}\mathbf{L} \\ &= -\nabla\Phi_v\mathbf{X}. \end{aligned} \quad (72)$$

Corollaire. — $\Phi = \frac{\Phi + \Phi_c}{2} - \frac{1}{2}\nabla\Phi_v$. (73)

Le déterminant de $\Phi - \Phi_c$ est le déterminant gauche suivant :

$$|\Phi - \Phi_c| = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} - a_{21} & a_{13} - a_{31} \\ a_{21} - a_{12} & 0 & a_{23} - a_{32} \\ a_{31} - a_{13} & a_{32} - a_{23} & 0 \end{vmatrix}. \quad (74)$$

Au point de vue mécanique la dyadique auto-conjuguée définit « une déformation pure », c'est-à-dire « trois dilatations suivant trois directions rectangulaires »*, et $\nabla\Phi_v\mathbf{X}$ une rotation autour du vecteur Φ_v . Par suite, si, sur un vecteur on effectue la transformation

$$\mathbf{X}' = \mathbf{X}_0 + \Phi\mathbf{X}$$

on aura la transformation linéaire la plus générale : translation, déformation pure, rotation.

Remarque. — La multiplication vectorielle est un cas particulier des dyadiques égales et contraires à leurs conjuguées.

En effet, supposons que l'on ait à effectuer le produit $\nabla\mathbf{AX}$; nous pouvons toujours supposer que le vecteur $\mathbf{A}$ a même direction que $\mathbf{k}$; on aura donc à un facteur constant près : $\nabla\mathbf{AX} = \nabla\mathbf{kX}$; d'où :

$$\Phi\mathbf{X} = \nabla\mathbf{kX} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ X_1 & X_2 & X_3 \end{vmatrix} = \mathbf{j}X_1 - \mathbf{i}X_2 = (\mathbf{j}.\mathbf{i} - \mathbf{i}.\mathbf{j})\mathbf{X}. \quad (75)$$

Donc $\Phi = \mathbf{j}.\mathbf{i} - \mathbf{i}.\mathbf{j}$ est une dyadique plane égale et contraire à sa conjuguée.

Droites doubles. — Une dyadique Φ peut-elle transformer un vecteur $\mathbf{X}$ en un vecteur $\mathbf{Y} = s\mathbf{X}$ ayant même direction, et, si cela est possible, de combien de façons ?

* CARVALLO, E. l. c., p. 207.

On doit avoir :

$$\Phi \mathbf{X} = s \mathbf{X}$$

ou

$$(\Phi - s \mathbf{I}) \mathbf{X} = 0 .$$

Comme nous pouvons toujours supposer le vecteur $\mathbf{X}$ différent de zéro, pour que cette expression soit nulle il faut que la dyadique $\Phi - s \mathbf{I}$ soit *plan*aire ; par suite son déterminant doit être nul, et l'on a :

$$(\Phi - s \mathbf{I})_3 = 0 ;$$

cette expression devient, en développant

$$s^3 - \Phi_s s^2 + \Phi_{2s} s - \Phi_3 = 0 . \quad (76)$$

Les racines de cette équation ne sont pas forcément réelles* ; supposons-les distinctes, soient s_1, s_2, s_3 . A s_1 , par exemple, les équations feront correspondre un vecteur $\mathbf{A}$; de même à s_2 et s_3 correspondront les vecteurs $\mathbf{B}$ et $\mathbf{C}$. En général, il y aura donc trois directions privilégiées $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ réelles ou imaginaires appelées *droites doubles* **, *directions principales* *** ou *directions permanentes* **** de Φ . Exceptionnellement l'équation en s pourra posséder une racine double ou triple ; nous reviendrons plus loin sur ces cas.

Forme canonique de Φ . — Proposons-nous de prendre comme antécédents de la dyadique les vecteurs $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ et cherchons à déterminer les conséquents.

Soit

$$\Phi = \mathbf{A} . \mathbf{L} + \mathbf{B} . \mathbf{M} + \mathbf{C} . \mathbf{N}$$

une dyadique ; appliquons-la au vecteur $\mathbf{A}$; on a :

$$\Phi \mathbf{A} = \mathbf{A} . \mathbf{L} \mathbf{A} + \mathbf{B} . \mathbf{M} \mathbf{A} + \mathbf{C} . \mathbf{N} \mathbf{A} = s_1 \mathbf{A} ;$$

cela entraîne

$$\mathbf{L} \mathbf{A} = s_1 \quad \mathbf{M} \mathbf{A} = 0 \quad \mathbf{N} \mathbf{A} = 0 ;$$

on trouverait de même : $\mathbf{L} \mathbf{B} = 0 \quad \mathbf{M} \mathbf{B} = s_2 \quad \mathbf{N} \mathbf{B} = 0$

$$\mathbf{L} \mathbf{C} = 0 \quad \mathbf{M} \mathbf{C} = 0 \quad \mathbf{N} \mathbf{C} = s_3 .$$

Si l'on tient compte des propriétés (29) et (30) des vecteurs réciproques, on voit que :

$$\mathbf{L} = s_1 \mathbf{A}' \quad \mathbf{M} = s_2 \mathbf{B}' \quad \mathbf{N} = s_3 \mathbf{C}'$$

et la dyadique devient :

$$\Phi = s_1 \mathbf{A} . \mathbf{A}' + s_2 \mathbf{B} . \mathbf{B}' + s_3 \mathbf{C} . \mathbf{C}' . \quad (77)$$

* Pour le cas des racines imaginaires voir un mémoire de M. PLARR inséré dans le t. XXVIII (1^{re} partie) des *Transactions de la société Royale d'Edimbourg*.

** J. MASSAU, *op. cit.*, p. 300.

*** C.-A. LAISANT, *Introduction à la méthode des quaternions*, p. 189.

**** E. CARVALLO : *loc. cit.*, p. 195.

Problème I. — A quelle condition les trois directions **A, B, C** forment-elles un système triple orthogonal ?

Supposons le système **A, B, C** orthogonal ; il en sera de même de son réciproque **A', B', C'**, et l'on aura :

$$\sqrt{\mathbf{A}\mathbf{A}'} = \sqrt{\mathbf{B}\mathbf{B}'} = \sqrt{\mathbf{C}\mathbf{C}'} = 0$$

par suite

$$\Phi_c = \Phi$$

et

$$a_{ik} = a_{ki}$$

c'est la condition cherchée.

Problème II. — Réduction de Φ dans le cas où $a_{ik} = a_{ki}$.

Dans ce cas : $\mathbf{A}' = \mathbf{A}$, $\mathbf{B}' = \mathbf{B}$, $\mathbf{C}' = \mathbf{C}$.

De plus, les racines de l'équation en s sont réelles* ; car si elles étaient imaginaires et de la forme $s + it$, à cette racine correspondrait en général un bivecteur** $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + i\mathbf{A}_2$ tel que

$$\Phi(\mathbf{A}_1 + i\mathbf{A}_2) = (s + it)(\mathbf{A}_1 + i\mathbf{A}_2).$$

Egalons les parties réelles et imaginaires ; on a :

$$\Phi\mathbf{A}_1 = s\mathbf{A}_1 - t\mathbf{A}_2 \quad \text{et} \quad \Phi\mathbf{A}_2 = t\mathbf{A}_1 + s\mathbf{A}_2 ;$$

mais si Φ est auto-conjuguée, on a $\mathbf{A}_2\Phi\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_1\Phi\mathbf{A}_2$

c'est-à-dire : $s\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 - t\mathbf{A}_2^2 = t\mathbf{A}_1^2 + s\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2$

ou $t(\mathbf{A}_1^2 + \mathbf{A}_2^2) = 0$

d'où $t = 0$.

Les racines sont donc réelles. Supposons-les distinctes, on aura :

$$\Phi = s_1\mathbf{A}.\mathbf{A} + s_2\mathbf{B}.\mathbf{B} + s_3\mathbf{C}.\mathbf{C} . \quad (78)$$

Equation d'Hamilton-Cayley. — Soit

$$\Phi = s_1\mathbf{A}.\mathbf{A}' + s_2\mathbf{B}.\mathbf{B}' + s_3\mathbf{C}.\mathbf{C}'$$

une dyadique ramenée à la forme canonique, et

$$\mathbf{I} = \mathbf{A}.\mathbf{A}' + \mathbf{B}.\mathbf{B}' + \mathbf{C}.\mathbf{C}' \quad \text{l'idemfacteur.}$$

* Pour la démonstration voir p. ex. M. LAISANT, *Introduction à la méthode des quaternions*, p. 193, n° 130.

** Le bivecteur est défini par GIBBS Sc. Pap., II, p. 85 ; voir aussi WILSON *Vect. An.*, p. 428.

On a successivement :

$$\begin{aligned}\Phi - s_3 \mathbf{I} &= (s_1 - s_3) \mathbf{A.A}' + (s_2 - s_3) \mathbf{B.B}' \\ (\Phi - s_2 \mathbf{I})(\Phi - s_3 \mathbf{I}) &= (s_1 - s_2)(s_1 - s_3) \mathbf{A.A}' \\ (\Phi - s_1 \mathbf{I})(\Phi - s_2 \mathbf{I})(\Phi - s_3 \mathbf{I}) &= 0 .\end{aligned}\quad (79)$$

Cette dernière expression devient en développant :

$$\Phi^3 - (s_1 + s_2 + s_3)\Phi^2 + (s_2 s_3 + s_3 s_1 + s_1 s_2)\Phi - s_1 s_2 s_3 = 0 ,$$

ou en tenant compte des relations entre les coefficients et les racines de l'équation (76)

$$\Phi^3 - \Phi_s \Phi^2 + \Phi_{2s} \Phi - \Phi_3 = 0 ; \quad (80)$$

c'est l'équation cherchée.

Cas particuliers. — 1) L'équation en s a une racine double ou triple.

Pour $s_2 = s_3$ on a : $\Phi = s_1 \mathbf{A.A}' + s_2 (\mathbf{B.B}' + \mathbf{C.C}')$,

et pour $s_1 = s_2 = s_3$ $\Phi = s_1 (\mathbf{A.A}' + \mathbf{B.B}' + \mathbf{C.C}') = s_1 \mathbf{I}$.

Si en outre $|a_{ik}|$ est symétrique, on a :

$$\Phi = s_1 \mathbf{A.A} + s_2 (\mathbf{B.B} + \mathbf{C.C})$$

et

$$\Phi = s_1 (\mathbf{A.A} + \mathbf{B.B} + \mathbf{C.C})$$

2) L'équation en s a une ou deux racines nulles.

Si $s_3 = 0$, on a $\Phi_3 = 0$ et la dyadique est *plan*

$$\Phi = s_1 \mathbf{A.A}' + s_2 \mathbf{B.B}' ;$$

si en outre a_{ik} est symétrique, la dyadique est *uniplanaire* et l'on a

$$\Phi = s_1 \mathbf{A.A} + s_2 \mathbf{B.B} .$$

Si $s_2 = s_3 = 0$, on a aussi $\Phi_3 = 0$ et $\Phi_{2s} = 0$; la dyadique est *linéaire*

$$\Phi = s_1 \mathbf{A.A}' .$$

et si de plus $|a_{ik}|$ est symétrique la dyadique est *unilinéaire*

$$\Phi = s_1 \mathbf{A.A} .$$

Produits de deux ou plusieurs dyadiques.

Dans la transformation $\mathbf{Y} = \Phi \mathbf{X}$

le vecteur $\mathbf{X}$ est arbitraire; en particulier on peut prendre pour $\mathbf{X}$ le vecteur

$$\mathbf{X} = \Psi \mathbf{Z} \equiv (\mathbf{C}_1 . \mathbf{D}_1 + \mathbf{C}_2 . \mathbf{D}_2 + \mathbf{C}_3 . \mathbf{D}_3) \mathbf{Z}$$

ce qui donne

$$\mathbf{Y} = \Phi \Psi \mathbf{Z} ,$$

et si l'on pose $\Phi \equiv (\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{B}_1 + \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{B}_2 + \mathbf{A}_3 \cdot \mathbf{B}_3)$

on aura $\mathbf{Y} = \sum \sum (\mathbf{A}_i \cdot \mathbf{B}_i) (\mathbf{C}_j \cdot \mathbf{D}_j) \mathbf{Z}$

$$= \sum \sum \mathbf{B}_i \mathbf{C}_j (\mathbf{A}_i \cdot \mathbf{D}_j) \mathbf{Z} .$$

La règle pour calculer le produit $\Phi \Psi$ en découle immédiatement; on trouve

$$\begin{aligned} \Phi \Psi = & \mathbf{B}_1 \mathbf{C}_1 (\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{D}_1) + \mathbf{B}_1 \mathbf{C}_2 (\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{D}_2) + \mathbf{B}_1 \mathbf{C}_3 (\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{D}_3) \\ & \mathbf{B}_2 \mathbf{C}_1 (\mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{D}_1) + \mathbf{B}_2 \mathbf{C}_2 (\mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{D}_2) + \mathbf{B}_2 \mathbf{C}_3 (\mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{D}_3) \\ & \mathbf{B}_3 \mathbf{C}_1 (\mathbf{A}_3 \cdot \mathbf{D}_1) + \mathbf{B}_3 \mathbf{C}_2 (\mathbf{A}_3 \cdot \mathbf{D}_2) + \mathbf{B}_3 \mathbf{C}_3 (\mathbf{A}_3 \cdot \mathbf{D}_3) . \end{aligned}$$

Théorème. — La conjuguée d'un produit est égale au produit des conjuguées prises dans l'ordre inverse.

$$\text{En effet} \quad (\Phi \Psi)_c \mathbf{X} = \mathbf{X} \Phi \Psi = \Psi_c (\mathbf{X} \Phi) = \Psi_c \Phi_c \mathbf{X}$$

$$\text{d'où} \quad (\Phi \Psi)_c = \Psi_c \Phi_c . \quad (81)$$

Corollaire I. — Plus généralement on trouve :

$$(\Phi \Psi \dots \Omega)_c = \Omega_c \dots \Psi_c \Phi_c .$$

Corollaire II. — A cause de l'égalité (69) on a aussi :

$$(\Phi \Psi)^{-1} = \Psi^{-1} \Phi^{-1}$$

$$\text{et} \quad (\Phi \Psi \dots \Omega)^{-1} = \Omega^{-1} \dots \Psi^{-1} \Phi^{-1} .$$

Le produit vectoriel $\nabla \Phi \Psi$ est un système de trois vecteurs que Gibbs appelle *triadique* *; ce produit n'a pas d'intérêt pour nous.

Double produit scalaire. — Considérons les deux dyadiques

$$\Phi = \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{B}_1 + \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{B}_2 + \mathbf{A}_3 \cdot \mathbf{B}_3$$

$$\Psi = \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{D}_1 + \mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{D}_2 + \mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{D}_3 ;$$

on appelle *double produit scalaire* et l'on désigne par $\Phi : \Psi$ le produit obtenu en multipliant scalairement les antécédents et les conséquents de Φ et Ψ .

$$\text{Ainsi} \quad \Phi : \Psi = (\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{B}_1 + \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{B}_2 + \mathbf{A}_3 \cdot \mathbf{B}_3) : (\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{D}_1 + \mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{D}_2 + \mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{D}_3)$$

$$\text{ou} \quad \Phi : \Psi = \sum \sum \mathbf{A}_i \mathbf{C}_j \cdot \mathbf{B}_i \mathbf{D}_j .$$

* W. GIBBS, *Vect. An. Sc. Pap.*, II, p. 74; WILSON, *op. cit.*, p. 281.

On vérifiera aisément les propriétés suivantes de ce produit :

- 1) $\Psi : \Phi = \Phi : \Psi ;$
- 2) $\Phi_c : \Psi_c = \Phi : \Psi ;$
- 3) $\Phi : \Phi_2 = \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{A}_3 \cdot \mathbf{B}_3 : (\mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3 \cdot \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_3 \cdot \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{B}_3 \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_2)$
 $= 3 [\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3] [\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_3]$
 $= 3 \Phi_3 ;$ (82)
- 4) $\Phi : \mathbf{I} = \Phi_s .$

Double produit vectoriel. — Le *double produit vectoriel* des deux dyadiques Φ et Ψ est une dyadique obtenue en multipliant vectoriellement les antécédents et les conséquents de Φ et Ψ ; nous le désignerons par $\mathbb{W} \Phi \Psi$:

$$\mathbb{W} \Phi \Psi = \Sigma \Sigma \mathbf{A}_i \mathbf{C}_j \cdot \mathbf{B}_i \mathbf{D}_j .$$

Ce produit est commutatif, car

$$\mathbf{A}_i \mathbf{C}_j \cdot \mathbf{B}_i \mathbf{D}_j = \mathbf{C}_j \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{D}_j \mathbf{B}_i ;$$

on a donc :

$$\mathbb{W} \Phi \Psi = \mathbb{W} \Psi \Phi . \quad (83)$$

Remarque :

$$(\mathbb{W} \Phi \Psi)_c = \Sigma \Sigma (\mathbf{A}_i \mathbf{C}_j \cdot \mathbf{B}_i \mathbf{D}_j)_c = \Sigma \Sigma (\mathbf{B}_i \mathbf{D}_j \cdot \mathbf{A}_i \mathbf{C}_j) = \mathbb{W} \Phi_c \Psi_c .$$

Théorème. — Démontrer que

$$\mathbb{W} \Phi \Psi \mathbf{X} \mathbf{Y} = \mathbf{X} \Phi \mathbf{Y} \Psi - \mathbf{Y} \Phi \mathbf{X} \Psi^* .$$

En effet .
$$\begin{aligned} \mathbb{W} \Phi \Psi \mathbf{X} \mathbf{Y} &= (\Sigma \Sigma \mathbf{A}_i \mathbf{C}_j \cdot \mathbf{B}_i \mathbf{D}_j) \mathbf{X} \mathbf{Y} \\ &= \Sigma \Sigma \{ \mathbf{A}_i \mathbf{C}_j \cdot (\mathbf{B}_i \mathbf{X} \cdot \mathbf{D}_j \mathbf{Y} - \mathbf{B}_i \mathbf{Y} \cdot \mathbf{D}_j \mathbf{X}) \} \\ &= \Sigma \Sigma \{ \mathbf{V}(\mathbf{A}_i \cdot \mathbf{B}_i \mathbf{X})(\mathbf{C}_j \cdot \mathbf{D}_j \mathbf{Y}) - \mathbf{V}(\mathbf{A}_i \cdot \mathbf{B}_i \mathbf{Y})(\mathbf{C}_j \cdot \mathbf{D}_j \mathbf{X}) \} \\ &= \mathbf{X} \Phi \mathbf{Y} \Psi - \mathbf{Y} \Phi \mathbf{X} \Psi . \end{aligned} \quad (84)$$

Corollaire I. — Si $\Psi = \mathbf{I}$ on a :

$$\mathbb{W} \Phi \mathbf{I} \mathbf{X} \mathbf{Y} = \mathbf{X} \Phi \mathbf{Y} - \mathbf{Y} \Phi \mathbf{X} . \quad (85)$$

* Formule analogue à $\mathbf{VABVCD} = \mathbf{AC} \cdot \mathbf{BD} - \mathbf{AD} \cdot \mathbf{BC} .$ (22)

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
 \dot{\vee} \mathbf{X} \Phi \mathbf{Y} - \dot{\vee} \mathbf{Y} \Phi \mathbf{X} &= \Sigma (\dot{\vee} \mathbf{X} \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{B}_i \mathbf{Y} - \dot{\vee} \mathbf{Y} \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{B}_i \mathbf{X}) \\
 &= \Sigma \dot{\vee} \mathbf{A}_i (\mathbf{Y} \cdot \mathbf{B}_i \mathbf{X} - \mathbf{X} \cdot \mathbf{B}_i \mathbf{Y}) \\
 &= \Sigma \dot{\vee} \mathbf{A}_i \dot{\vee} \mathbf{B}_i \dot{\vee} \mathbf{Y} \mathbf{X} \\
 &= \Sigma (\mathbf{B}_i \cdot \mathbf{A}_i \mathbf{Y} \mathbf{X} - \mathbf{A}_i \mathbf{B}_i \cdot \dot{\vee} \mathbf{Y} \mathbf{X}) \\
 &= (\Phi_c - \Phi_s) \dot{\vee} \mathbf{Y} \mathbf{X} .
 \end{aligned} \tag{86}$$

Par suite $\dot{\vee} \Phi \mathbf{I} = \Phi_s - \Phi_c$. (87)

Corollaire II. — Faisons $\Psi = \Phi$, il vient :

$$\begin{aligned}
 \dot{\vee} \Phi \Phi \dot{\vee} \mathbf{X} \mathbf{Y} &= {}_2 \dot{\vee} \Phi \mathbf{X} \Phi \mathbf{Y} = {}_2 \Phi_2 \dot{\vee} \mathbf{X} \mathbf{Y} \\
 \text{d'où} \quad \dot{\vee} \Phi \Phi &= {}_2 \Phi_2 * .
 \end{aligned} \tag{88}$$

De même $\dot{\vee} \Phi_2 \Phi_2 \dot{\vee} \mathbf{X} \mathbf{Y} = {}_2 \dot{\vee} \Phi_2 \mathbf{X} \Phi_2 \mathbf{Y} = {}_2 \Phi_3 \cdot \Phi \dot{\vee} \mathbf{X} \mathbf{Y}$
d'où $\dot{\vee} \Phi_2 \Phi_2 = {}_2 \Phi_3 \cdot \Phi **$. (89)

Il s'ensuit que $\dot{\vee} \Pi = {}_2 \mathbf{I}_2 = {}_2 \mathbf{I}$
et $\Phi : \dot{\vee} \Phi \Phi = \Phi : {}_2 \Phi_2 = {}_6 \Phi_3$. (90)

Théorème. — $(\Phi + \Psi)_2 = \Phi_2 + \dot{\vee} \Phi \Psi + \Psi_2 ***$. (91)

En effet $\dot{\vee} (\Phi + \Psi) \mathbf{X} (\Phi + \Psi) \mathbf{Y} = (\Phi + \Psi)_2 \dot{\vee} \mathbf{X} \mathbf{Y}$

d'autre part $\dot{\vee} (\Phi + \Psi) \mathbf{X} (\Phi + \Psi) \mathbf{Y} = \dot{\vee} \Phi \mathbf{X} \Phi \mathbf{Y} + \dot{\vee} \Phi \mathbf{X} \Psi \mathbf{Y} + \dot{\vee} \Phi \mathbf{Y} \Psi \mathbf{X} + \dot{\vee} \Psi \mathbf{X} \Psi \mathbf{Y}$
ou à cause de (58) et (84) :

$$(\Phi + \Psi)_2 \dot{\vee} \mathbf{X} \mathbf{Y} = (\Phi_2 + \dot{\vee} \Phi \Psi + \Psi_2) \dot{\vee} \mathbf{X} \mathbf{Y} . \quad \text{c. q. f. d.}$$

Corollaire I. — $(\Phi + \Psi + \Upsilon)_2 = \Phi_2 + \Psi_2 + \Upsilon_2 + \dot{\vee} \Phi \Psi + \dot{\vee} \Phi \Upsilon + \dot{\vee} \Psi \Upsilon$;

en effet, posons : $\Psi + \Upsilon \equiv \Theta$;

il vient : $(\Phi + \Theta)_2 = \Phi_2 + \dot{\vee} \Phi \Theta + \Theta_2$;

d'où $(\Phi + \Psi + \Upsilon)_2 = \Phi_2 + \dot{\vee} \Phi (\Psi + \Upsilon) + (\Psi + \Upsilon)_2$
 $= \Phi_2 + \Psi_2 + \Upsilon_2 + \dot{\vee} \Phi \Psi + \dot{\vee} \Phi \Upsilon + \dot{\vee} \Psi \Upsilon$.

* C'est de cette relation que part WILSON pour définir Φ_2 (*Vect. An.*, p. 310, 311).

** WILSON *Vect. An.*, p. 331, n° 17.

*** WILSON, *op. cit.*, p. 331, n° 17.

Plus généralement on montrera aisément que :

$$(\Phi + \Psi + \dots + \Omega)_2 = \Sigma \Phi_2 + \Sigma \mathbb{W}\Phi\Psi, \quad (92)$$

formule analogue au carré d'un polynôme.

Corollaire II. — On sait que $(\Phi + \Psi) : (\Phi + \Psi)_2 = 3(\Phi + \Psi)_3$.

$$\begin{aligned} \text{Par suite } 3(\Phi + \Psi)_3 &= (\Phi + \Psi) : (\Phi_2 + \mathbb{W}\Phi\Psi + \Psi_2) \\ &= 3(\Phi_3 + \Phi_2 : \Psi + \Phi : \Psi_2 + \Psi_3). \end{aligned}$$

De même

$$(\Phi + \Psi + \Upsilon)_3 = \Phi_3 + \Psi_3 + \Upsilon_3 + \Phi_2 : \Psi + \Phi : \Psi_2 + \Phi_2 : \Upsilon + \Phi : \Upsilon_2 + \Psi_2 : \Upsilon + \Psi : \Upsilon_2.$$

Et plus généralement

$$(\Phi + \Psi + \dots + \Omega)_3 = \Sigma \Phi_3 + \Sigma(\Phi : \Psi_2). \quad (93)$$

Théorème. — $\mathbb{W}\Upsilon\mathbb{W}\Phi\Psi = \Phi.\Psi : \Upsilon + \Psi.\Phi : \Upsilon - \Phi\Upsilon_c\Psi - \Psi\Upsilon_c\Phi$.

Posons $\Upsilon = \mathbf{E}_1.\mathbf{F}_1 + \mathbf{E}_2.\mathbf{F}_2 + \mathbf{E}_3.\mathbf{F}_3$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } \mathbb{W}\Upsilon\mathbb{W}\Phi\Psi &= \\ &= \Sigma\Sigma\Sigma(\mathbb{V}\mathbf{E}_k\mathbb{V}\mathbf{A}_i\mathbf{C}_j.\mathbb{V}\mathbf{F}_k\mathbb{V}\mathbf{B}_i\mathbf{D}_j) \\ &= \Sigma\Sigma\Sigma\{(\mathbf{A}_i.\mathbf{C}_j\mathbf{E}_k - \mathbf{C}_j.\mathbf{A}_i\mathbf{E}_k).(\mathbf{B}_i.\mathbf{D}_j\mathbf{F}_k - \mathbf{D}_j.\mathbf{B}_i\mathbf{F}_k)\} \\ &= \Sigma\Sigma\Sigma\{\mathbf{A}_i.\mathbf{B}_i.\mathbf{C}_j\mathbf{E}_k.\mathbf{D}_j\mathbf{F}_k + \mathbf{C}_j.\mathbf{D}_j\mathbf{A}_i\mathbf{E}_k.\mathbf{B}_i\mathbf{F}_k - (\mathbf{A}_i.\mathbf{D}_j)\mathbf{C}_j\mathbf{E}_k.\mathbf{B}_i\mathbf{F}_k - \mathbf{C}_j.\mathbf{B}_i\mathbf{A}_i\mathbf{E}_k.\mathbf{D}_j\mathbf{F}_k\} \\ &= \Phi.\Psi : \Upsilon + \Psi.\Phi : \Upsilon - \Sigma\Sigma\Sigma\{(\mathbf{A}_i.\mathbf{B}_i)(\mathbf{F}_k.\mathbf{E}_k)(\mathbf{C}_j.\mathbf{D}_j) - (\mathbf{C}_j.\mathbf{D}_j)\mathbf{F}_k.\mathbf{E}_k\}(\mathbf{A}_i.\mathbf{B}_i)\} \\ &= \Phi.\Psi : \Upsilon + \Psi.\Phi : \Upsilon - \Phi\Upsilon_c\Psi - \Psi\Upsilon_c\Phi. \end{aligned} \quad (94)$$

Corollaire I. — Si $\Phi = \Psi = \mathbf{I}$ on retrouve un théorème connu

$$\mathbb{W}\Upsilon\mathbf{I} = \Upsilon_s - \Upsilon_c. \quad (87)$$

Corollaire II. — Si $\Upsilon = \mathbb{W}\Phi\Psi$, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{W}\mathbb{W}\Phi\Psi\mathbb{W}\Phi\Psi &= {}_2(\mathbb{W}\Phi\Psi)_2 \\ &= \Phi.\Psi : \mathbb{W}\Phi\Psi + \Psi.\Phi : \mathbb{W}\Phi\Psi - \Phi(\mathbb{W}\Phi_c\Psi_c)\Psi - \Psi(\mathbb{W}\Phi_c\Psi_c)\Phi. \end{aligned}$$

Par analogie avec $\mathbf{A}\mathbb{V}\mathbf{BC} = [\mathbf{ABC}]$

posons $\Psi : \mathbb{W}\Phi\Psi \equiv [\Psi\Phi\Psi]$,

et remarquons que les dyadiques de ce produit peuvent être interverties d'une façon quelconque * ; il vient :

$$\begin{aligned} {}_2(\mathbb{W}\Phi\Psi)_2 &= \Phi.[\Psi\Phi\Psi] + \Psi.[\Psi\Phi\Psi] - \Phi(\mathbb{W}\Phi_c\Psi_c)\Psi - \Psi(\mathbb{W}\Phi_c\Psi_c)\Phi \\ {}_2(\mathbb{W}\Phi\Psi)_2 &= {}_2\Phi.\Phi : \Psi_2 + {}_2\Psi.\Psi : \Phi_2 - \Phi(\mathbb{W}\Phi_c\Psi_c)\Psi - \Psi(\mathbb{W}\Phi_c\Psi_c)\Phi. \end{aligned} \quad (95)$$

* WILSON, *op. cit.*, p. 309.

Dans le cas particulier où les dyadiques Φ et Ψ sont *auto-conjuguées*, la formule précédente donne :

$$(\mathbb{W}\Phi\Psi)_2 = \Phi.\Phi : \Psi_2 + \Psi.\Psi : \Phi_2 - \Phi(\mathbb{W}\Phi\Psi)\Psi . \quad (96)$$

Corollaire III. — Faisons $\Upsilon = \mathbb{W}\Theta\Omega$; on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{W}\mathbb{W}\Theta\Omega\mathbb{W}\Phi\Psi &= \Phi.\Psi : \mathbb{W}\Theta\Omega + \Psi.\Phi : \mathbb{W}\Theta\Omega - \Phi(\mathbb{W}\Theta\Omega)_c\Psi - \Psi(\mathbb{W}\Theta\Omega)\Phi \\ &= \Phi.[\Psi\Theta\Omega] + \Psi.[\Phi\Theta\Omega] - \Phi(\mathbb{W}\Theta_c\Omega_c)\Psi - \Psi(\mathbb{W}\Theta_c\Omega_c)\Phi . \end{aligned} \quad (97)$$

Effectuons encore les produits de la forme $\mathbb{W}\Theta\Upsilon : \mathbb{W}\Phi\Psi$.

Posons $\Theta = \mathbf{G}_1.\mathbf{H}_1 + \mathbf{G}_2.\mathbf{H}_2 + \mathbf{G}_3.\mathbf{H}_3$;

$$\begin{aligned} \text{on a : } \mathbb{W}\Theta\Upsilon : \mathbb{W}\Phi\Psi &= \Sigma\Sigma\Sigma\Sigma(\mathbb{W}\mathbf{G}_i\mathbf{E}_k\mathbb{W}\mathbf{A}_i\mathbf{C}_j\mathbb{W}\mathbf{H}_i\mathbf{F}_k\mathbb{W}\mathbf{B}_i\mathbf{D}_j) \\ &= \Sigma\Sigma\Sigma\Sigma(\mathbf{A}_i\mathbf{G}_i.\mathbf{C}_j\mathbf{E}_k - \mathbf{C}_j\mathbf{G}_i.\mathbf{A}_i\mathbf{E}_k)(\mathbf{B}_i\mathbf{H}_i.\mathbf{D}_j\mathbf{F}_k - \mathbf{D}_j\mathbf{H}_i.\mathbf{B}_i\mathbf{F}_k) \\ &= \Sigma\Sigma\Sigma\Sigma\{\mathbf{A}_i\mathbf{G}_i.\mathbf{B}_i\mathbf{H}_i.\mathbf{C}_j\mathbf{E}_k.\mathbf{D}_j\mathbf{F}_k + \mathbf{C}_j\mathbf{G}_i.\mathbf{D}_j\mathbf{H}_i.\mathbf{A}_i\mathbf{E}_k.\mathbf{B}_i\mathbf{F}_k - \\ &\quad - \mathbf{G}_i\mathbf{A}_i.\mathbf{B}_i\mathbf{F}_k.\mathbf{E}_k\mathbf{C}_j.\mathbf{D}_j\mathbf{H}_i - \mathbf{G}_i\mathbf{C}_j.\mathbf{D}_j\mathbf{F}_k.\mathbf{E}_k\mathbf{A}_i.\mathbf{B}_i\mathbf{H}_i\} \\ &= 2(\Phi : \Upsilon)(\Psi : \Upsilon) - \Theta : \Phi\Upsilon_c\Psi - \Theta : \Psi\Upsilon_c\Phi . \end{aligned} \quad (98)$$

Corollaire I. — Faisons $\Theta = \Upsilon = \Omega_2$, on a :

$$2\Omega_3[\Omega\Phi\Psi] = 2(\Phi : \Omega_2)(\Psi : \Omega_2) - \Omega_2 : \Phi\Omega_{2c}\Psi - \Omega_2 : \Psi\Omega_{2c}\Phi . \quad (99)$$

Corollaire II. — En particulier si Φ, Ψ et Ω sont *auto-conjuguées*, on a :

$$\Omega_3[\Omega\Phi\Psi] = (\Phi : \Omega_2)(\Psi : \Omega_2) - \Omega_2 : \Phi\Omega_2\Psi . \quad (100)$$



CHAPITRE II

Notions de géométrie analytique

I. POINT, PLAN, DROITE

Point et plan.

Soit ρ le vecteur joignant l'origine O à un point quelconque P d'un plan π et soit $\mathbf{N}$ la normale abaissée de O sur ce plan. Quel que soit ρ , on a :

$$\mathbf{N}(\rho - \mathbf{N}) = 0$$

ou

$$\mathbf{N}\rho - \mathbf{N}^2 = 0 ;$$

posons

$$\frac{\mathbf{N}}{-\mathbf{N}^2} \equiv \mathbf{u} , \quad (101)$$

il vient

$$\rho\mathbf{u} + 1 = 0 . \quad (102)$$

Si $\mathbf{u}$ est fixe, cette équation (102) représente une infinité de points ρ situés dans π : c'est l'équation du plan $\mathbf{u}$; le vecteur $\mathbf{u}$ est la coordonnée de π .

Rem. I. — L'équation $\rho\mathbf{u}=0$ (103) représente un plan passant par l'origine, car elle est satisfaite pour $\rho=0$.

Rem. II. — Deux plans $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$ sont parallèles si $\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2=0$ (105); ils sont perpendiculaires si $\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2=0$. (107)

Relation de Chasles. — Soient $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n$ n plans passant par une même droite, et $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \dots, \mathbf{N}_n$ les normales abaissées de l'origine O sur ces plans. Les pieds des normales $\mathbf{N}_i$ sont sur une circonférence

Si ρ est fixe, l'équation (102) représente une infinité de plans $\mathbf{u}$ passant par ρ : c'est l'équation du point ρ ; le vecteur ρ est la coordonnée de P .

Rem. I. — L'équation $\rho\mathbf{u}=0$ (104) représente un point de l'infini car elle est vérifiée pour $\mathbf{u}=0$.

Rem. II. — Deux points ρ_1 et ρ_2 sont collinéaires avec l'origine si $\rho_1\rho_2=0$. (106)

Relation de Chasles. — Si les points $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ sont en ligne droite, on a :

$$\rho_1\rho_2 + \rho_2\rho_3 + \dots + \rho_{n-1}\rho_n + \rho_n\rho_1 = 0. \quad (108)$$

C'est la relation de Chasles.

passant en O. Comme les u_i , d'après (101), sont les inverses (puissance -1) des N_i , les extrémités des vecteurs u_i sont en ligne droite. Par suite (108):

$$\sqrt{u_1 u_2} + \sqrt{u_2 u_3} + \dots + \sqrt{u_{n-1} u_n} + \sqrt{u_n u_1} = 0. \quad (109)$$

Intersection ρ de trois plans donnés u_1, u_2, u_3 .

Les pieds des normales aux plans u_i sont sur une sphère passant par l'origine; par suite les extrémités des vecteurs u_i et donc $u - u_i$ ($i = 1, 2, 3$) sont coplanaires,

$$\text{donc } [(u - u_1)(u - u_2)(u - u_3)] = 0$$

ou

$$u(\sqrt{u_2 u_3} + \sqrt{u_3 u_1} + \sqrt{u_1 u_2}) - [u_1 u_2 u_3] = 0. \quad (110)$$

1) Supposons $[u_1 u_2 u_3] \neq 0$ et ramenons ce plan à la forme (102); on a alors :

$$\hat{\rho} = - (u'_1 + u'_2 + u'_3). \quad (112)$$

Les plans donnés se coupent en ce point.

$$2) \quad [u_1 u_2 u_3] = 0, \quad \text{mais}$$

$$\sqrt{u_2 u_3} + \sqrt{u_3 u_1} + \sqrt{u_1 u_2} \neq 0;$$

les u_i sont coplanaires, mais leurs extrémités forment un triangle. L'équation (110) est de la forme $\rho u = 0$ où u est un vecteur fixe : c'est un point à l'infini (104).

$$3) \quad [u_1 u_2 u_3] = 0,$$

et $\sqrt{u_2 u_3} + \sqrt{u_3 u_1} + \sqrt{u_1 u_2} = 0$, mais $\sqrt{u_i u_j} \neq 0$. Les trois plans donnés passent par une même droite située à distance finie. Le point ρ est un point quelconque de cette droite.

4) $\sqrt{u_i u_j} = 0$ et $u_i \neq u_j$. Les normales aux plans donnés sont con-

Plan u passant par trois points donnés ρ_1, ρ_2, ρ_3 .

Si ρ est un point quelconque de u on a :

$$[(\rho - \rho_1)(\rho - \rho_2)(\rho - \rho_3)] = 0$$

ou

$$\rho(\sqrt{\rho_2 \rho_3} + \sqrt{\rho_3 \rho_1} + \sqrt{\rho_1 \rho_2}) - [\rho_1 \rho_2 \rho_3] = 0. \quad (111)$$

1) Supposons $[\rho_1 \rho_2 \rho_3] \neq 0$; on peut diviser par $[\rho_1 \rho_2 \rho_3]$ et l'on a :

$$u = -(\rho'_1 + \rho'_2 + \rho'_3). \quad (113)$$

C'est le plan déterminé par les points donnés ρ_i .

$$2) \quad [\rho_1 \rho_2 \rho_3] = 0, \quad \text{mais}$$

$$\sqrt{\rho_1 \rho_3} + \sqrt{\rho_3 \rho_1} + \sqrt{\rho_1 \rho_2} \neq 0;$$

les trois points forment un triangle dont le plan passe en O. L'équation (111) est de la forme $\rho u = 0$ où ρ est un vecteur fixe : c'est un plan passant par l'origine (103).

$$3) \quad [\rho_1 \rho_2 \rho_3] = 0,$$

et $\sqrt{\rho_2 \rho_3} + \sqrt{\rho_3 \rho_1} + \sqrt{\rho_1 \rho_2} = 0$, mais $\sqrt{\rho_i \rho_j} \neq 0$. Les trois points donnés sont sur une droite ne passant pas à l'origine. Le plan u est un plan quelconque passant par cette droite.

4) $\sqrt{\rho_i \rho_j} = 0$ mais $\rho_i \neq \rho_j$. Les trois points donnés sont collinéaires

fondues mais leurs extrémités sont distinctes ; ρ est un point quelconque de la droite de l'infini déterminée par les trois plans donnés.

$$5) \quad \bigvee \mathbf{u}_i \mathbf{u}_j = 0 \text{ et } \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_3 \neq 0.$$

Les trois plans donnés sont confondus mais situés à distance finie ; ρ est un point quelconque de ce plan.

6) $\mathbf{u}_i = 0$. Les trois plans donnés sont confondus et rejetés à l'infini ; ρ est un point quelconque de l'infini.

Condition pour qu'un plan passe par l'intersection de trois autres.

Soit $\rho = -(\mathbf{u}'_1 + \mathbf{u}'_2 + \mathbf{u}'_3)$ le point d'intersection des trois plans donnés ; pour que le plan $\mathbf{u}_4$ passe par ce point il faut que

$$\rho \mathbf{u}_4 + 1 = 0$$

$$\text{ou} \quad \mathbf{u}_4(\mathbf{u}'_1 + \mathbf{u}'_2 + \mathbf{u}'_3) - 1 = 0$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_4(\bigvee \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_3 + \bigvee \mathbf{u}_3 \mathbf{u}_1 + \bigvee \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2) - [\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_3] &= 0 \\ [\mathbf{u}_2 \mathbf{u}_3 \mathbf{u}_4] - [\mathbf{u}_3 \mathbf{u}_4 \mathbf{u}_1] + [\mathbf{u}_4 \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2] - [\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_3] &= 0. \end{aligned} \quad (114)$$

C'est la condition cherchée.

Remarque. — En particulier si $\mathbf{u}_4$ vérifie la relation

$$\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \lambda_3 \mathbf{u}_3 + \lambda_4 \mathbf{u}_4 = 0,$$

il faudra que

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0.$$

avec l'origine, mais ils sont distincts ; $\mathbf{u}$ est un plan quelconque passant par l'origine et par la droite que déterminent les trois points donnés.

$$5) \quad \bigvee \rho_i \rho_j = 0 \text{ et } \rho_1 = \rho_2 = \rho_3 \neq 0.$$

Les trois points donnés sont confondus mais situés à distance finie ; $\mathbf{u}$ est un plan quelconque passant par ce point.

6) $\rho_i = 0$. Les trois points donnés se confondent avec l'origine ; $\mathbf{u}$ est un plan quelconque passant par l'origine.

Condition pour qu'un point soit situé dans le plan de trois autres.

Soit $\mathbf{u} = -(\rho'_1 + \rho'_2 + \rho'_3)$ le plan déterminé par les trois points donnés ; pour que le point ρ_4 soit situé dans ce plan il faut que

$$\mathbf{u} \rho_4 + 1 = 0$$

$$\text{ou} \quad \rho_4(\rho'_1 + \rho'_2 + \rho'_3) - 1 = 0$$

$$\begin{aligned} \rho_4(\bigvee \rho_2 \rho_3 + \bigvee \rho_3 \rho_1 + \bigvee \rho_1 \rho_2) - [\rho_1 \rho_2 \rho_3] &= 0 \\ [\rho_2 \rho_3 \rho_4] - [\rho_3 \rho_4 \rho_1] + [\rho_4 \rho_1 \rho_2] - [\rho_1 \rho_2 \rho_3] &= 0. \end{aligned} \quad (115)$$

C'est la condition cherchée.

Remarque. — En particulier si ρ_4 satisfait à la relation

$$\lambda_1 \rho_1 + \lambda_2 \rho_2 + \lambda_3 \rho_3 + \lambda_4 \rho_4 = 0,$$

il faut que

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0.$$

Transformation de coordonnées.

1) Changement d'origine. —

Faisons le changement $\rho = \rho_0 + \rho'$ et cherchons ce que deviennent les vecteurs ρ et u de l'équation du plan

$$\rho u + 1 = 0.$$

On a évidemment $\rho' = \rho - \rho_0$; (116)
d'autre part $\rho u + 1 = \rho' u + \rho_0 u + 1 = 0$
d'où $\rho' \frac{u}{1 + \rho_0 u} + 1 = 0$.

Le vecteur u du plan est donc devenu :

$$u' = \frac{u}{1 + \rho_0 u}. \quad (118)$$

Inversement si l'on passe des nouvelles coordonnées aux anciennes par le changement $\rho' = \rho - \rho_0$, on aura :

$$\rho = \rho_0 + \rho' \text{ et } u = \frac{u'}{1 - \rho_0 u'}.$$

2) Transformation dyadique.

Sur tout point ρ du plan $\rho u + 1 = 0$ effectuons le changement :

$$\rho' = \Phi \rho. \quad (120)$$

Alors $\rho = \Phi^{-1} \rho'$

et $\rho u + 1 = \rho' \Phi_c^{-1} u + 1 = 0$

donc $u' = \Phi_c^{-1} u$. (122)

Inversement si l'on passe des nouvelles coordonnées aux anciennes par le changement $\rho = \Phi^{-1} \rho'$ on aura : $u = \Phi_c u'$.

3) Transformation générale.

Enfin cherchons ce que devient le vecteur u d'un plan lorsque

$$\rho' = \rho_0 + \Phi \rho. \quad (124)$$

On a : $\rho = \Phi^{-1}(\rho' - \rho_0)$;

1) Changement d'origine. —

Faisons le changement $u = u_0 + u'$ et cherchons ce que deviennent les vecteurs u et ρ de l'équation du point

$$\rho u + 1 = 0.$$

On a évidemment $u' = u - u_0$; (117)
d'autre part : $\rho u + 1 = u' \rho + \rho u_0 + 1 = 0$
d'où $u' \frac{\rho}{1 + \rho u_0} + 1 = 0$

Le vecteur ρ du point est donc devenu :

$$\rho' = \frac{\rho}{1 + \rho u_0}. \quad (119)$$

Inversement si l'on passe des nouvelles coordonnées aux anciennes par le changement $u' = u - u_0$, on aura :

$$u = u_0 + u' \text{ et } \rho = \frac{\rho'}{1 - \rho' u_0}.$$

2) Transformation dyadique.

Sur tout plan u du point $\rho u + 1 = 0$ opérons par Φ , il vient :

$$u' = \Phi u. \quad (121)$$

Alors $u = \Phi^{-1} u'$

et $\rho u + 1 = u' \Phi_c^{-1} \rho + 1 = 0$

donc : $\rho' = \Phi_c^{-1} \rho$. (123)

Inversement si l'on passe des nouvelles coordonnées aux anciennes par le changement $u = \Phi^{-1} u'$ on aura : $\rho = \Phi_c \rho'$.

3) Transformation générale.

Enfin cherchons ce que devient le vecteur ρ d'un point lorsque

$$u' = u_0 + \Phi u. \quad (125)$$

On a : $u = \Phi^{-1}(u' - u_0)$;

substituons dans l'équation du plan, il vient :

$$\rho' \Phi_c^{-1} \mathbf{u} - \rho_0 \Phi_c^{-1} \mathbf{u} + 1 = 0$$

ou
$$\rho' \frac{\Phi_c^{-1} \mathbf{u}}{1 - \rho_0 \Phi_c^{-1} \mathbf{u}} + 1 = 0 .$$

Par cette transformation le vecteur $\mathbf{u}$ est devenu :

$$\mathbf{u}' = \frac{\Phi_c^{-1} \mathbf{u}}{1 - \rho_0 \Phi_c^{-1} \mathbf{u}} . \quad (126)$$

Inversement pour passer des nouvelles coordonnées aux anciennes, on posera $\rho = \Phi^{-1}(\rho' - \rho_0)$

et on trouve
$$\mathbf{u} = \frac{\Phi_c \mathbf{u}'}{1 + \rho_0 \mathbf{u}'} .$$

substituons dans l'équation du point, il vient :

$$\mathbf{u}' \Phi_c^{-1} \rho - \mathbf{u}_0 \Phi_c^{-1} \rho + 1 = 0$$

ou
$$\mathbf{u}' \frac{\Phi_c^{-1} \rho}{1 - \mathbf{u}_0 \Phi_c^{-1} \rho} + 1 = 0 .$$

Par cette transformation, le vecteur ρ est devenu :

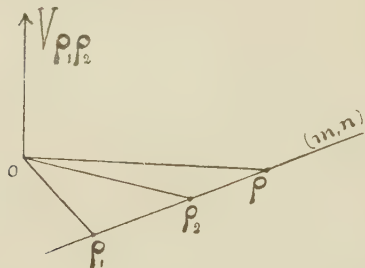
$$\rho' = \frac{\Phi_c^{-1} \rho}{1 - \mathbf{u}_0 \Phi_c^{-1} \rho} . \quad (127)$$

Inversement pour passer des nouvelles coordonnées aux anciennes, on posera $\mathbf{u} = \Phi^{-1}(\mathbf{u}' - \mathbf{u}_0)$

et on trouve
$$\rho = \frac{\Phi_c \rho'}{1 + \rho' \mathbf{u}_0} .$$

Droite.

Une droite est complètement déterminée par deux points ρ_1 et ρ_2 ; mais nous pouvons aussi la déterminer par



miner par $\mathbf{m} = \rho_1 - \rho_2$ qui indique sa direction, et $\mathbf{n} = V_{\rho_1 \rho_2}$ qui donne son moment par rapport à l'origine * ; $\mathbf{m}$ et $\mathbf{n}$ sont appelées coordonnées *radiales* ** de la droite.

Une droite est complètement déterminée par deux plans $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$; mais nous pouvons aussi la déterminer par

$$\mathbf{p} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$$

et

$$\mathbf{q} = V_{\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2}$$

qui donne sa direction ; $\mathbf{p}$ et $\mathbf{q}$ sont appelées les coordonnées *axiales* *** de la droite.

* $\mathbf{m}$ est un « vecteur linéaire » (Linienvektor) et $\mathbf{n}$ un « vecteur de surface » (Flächenvektor). Voir TIMMERDING : *Geometrie der Kräfte*, p. 20, ou encore FÖPPL-ABRAHAM : *Theorie der Elektrizität*, I, p. 22.

** Ce sont les *Strahlen-Coordinaten* de PLÜCKER : *Neue Geom. des Raumes*, p. 1.

*** Ce sont les *Axen Coordinaten* de PLÜCKER : *Neue Geom. des Raumes*, p. 3.

Le rapport $\frac{n}{m}$ de leurs tenseurs est égal à la distance de O à la droite ; ce rapport étant constant quels que soient les points ρ_1 et ρ_2 choisis, les vecteurs $(k\mathbf{m}, k\mathbf{n})$ représenteront le même *rayon* que $(\mathbf{m}, \mathbf{n})$.

Les coordonnées d'un rayon étant rectangulaires sont liées par la relation $\mathbf{mn} = 0$. (128)

Pour la même raison on a : $\rho\mathbf{n} = 0$.

Un point quelconque ρ de la ponctuelle (ρ_1, ρ_2) vérifie la relation de Chasles (108) :

$$\sqrt{\rho\rho_1} + \sqrt{\rho_1\rho_2} + \sqrt{\rho_2\rho} = 0 ;$$

or, cette relation peut s'écrire

$$\sqrt{\rho(\rho_1 - \rho_2)} + \sqrt{\rho_1\rho_2} = 0 ;$$

ou $\sqrt{\rho\mathbf{m} + \mathbf{n}} = 0$. (130)

C'est l'équation d'un rayon, c'est-à-dire la condition pour que ρ soit sur $(\mathbf{m}, \mathbf{n})$.

Condition pour qu'un plan u passe par un rayon (ρ_1, ρ_2) . —

Lemme. — Si $\mathbf{u}$ passe par ρ_1 et ρ_2

on a : $\rho_1\mathbf{u} + 1 = 0$

et $\rho_2\mathbf{u} + 1 = 0$;

d'où $\mathbf{u}(\rho_1 - \rho_2) = \mathbf{u}\mathbf{m} = 0$. (132)

Le rapport $\frac{q}{p}$ étant constant, quels que soient les plans $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$ choisis, les vecteurs $(k\mathbf{p}, k\mathbf{q})$ représenteront le même *axe* que $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$.

Les coordonnées d'un axe étant rectangulaires sont liées par la relation $\mathbf{pq} = 0$. (129)

Pour la même raison on a : $\mathbf{uq} = 0$.

Un plan quelconque $\mathbf{u}$ du faisceau $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ vérifie la relation de Chasles (109) :

$$\sqrt{\mathbf{u}\mathbf{u}_1} + \sqrt{\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2} + \sqrt{\mathbf{u}_2\mathbf{u}} = 0 ;$$

or, cette relation peut s'écrire

$$\sqrt{\mathbf{u}(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)} + \sqrt{\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2} = 0 ;$$

ou $\sqrt{\mathbf{up} + \mathbf{q}} = 0$. (131)

C'est l'équation d'un axe, c'est-à-dire la condition pour que $\mathbf{u}$ passe par $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$.

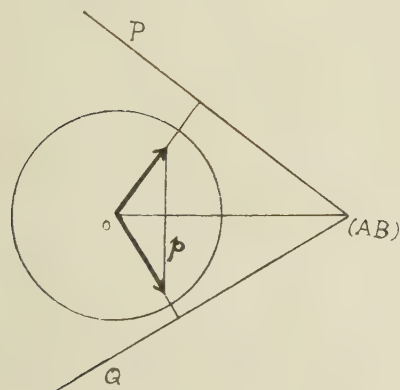
Condition pour qu'un point ρ soit situé sur un axe $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$. —

Lemme. — Si ρ est dans $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$

on a : $\rho\mathbf{u}_1 + 1 = 0$

et $\rho\mathbf{u}_2 + 1 = 0$;

d'où $\rho(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) = \rho\mathbf{p} = 0$ * . (133)



* Géométriquement la condition

$$\rho\mathbf{p} = 0$$

montre que si du centre O d'une sphère on abaisse des perpendiculaires à deux plans P et Q qui se coupent suivant AB, la droite qui joint les inverses des pieds des normales est perpendiculaire au plan OAB. (Il est évident que la puissance d'inversion peut être quelconque, au lieu de -1 comme dans le cas qui nous occupe).

Cela étant, si $\mathbf{u}$ passe par un rayon, on aura :

$$\mathbf{m}\mathbf{n} = 0 \text{ et } \mathbf{m}\mathbf{u} = 0 .$$

Par suite $\mathbf{m} = \lambda \sqrt{\mathbf{u}\mathbf{n}}$

ou $\rho_1 - \rho_2 = \lambda \sqrt{\mathbf{u}\mathbf{V}\rho_1\rho_2}$

$$\rho_1 - \rho_2 = \lambda(\rho_1 \cdot \mathbf{u}\rho_2 - \rho_2 \cdot \mathbf{u}\rho_1) ;$$

mais $\mathbf{u}\rho_2 = \mathbf{u}\rho_1 = -1$

puisque ρ_1 et ρ_2 sont dans $\mathbf{u}$; par suite $\lambda = -1$

et l'on trouve $\sqrt{\mathbf{u}\mathbf{n}} + \mathbf{m} = 0$. (134)

C'est la condition cherchée.

Cela étant, si ρ est sur un axe on aura :

$$\mathbf{p}\mathbf{q} = 0 \text{ et } \mathbf{p}\mathbf{q} = 0 .$$

Par suite $\mathbf{p} = \lambda \sqrt{\rho\mathbf{q}}$

ou $\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 = \lambda \sqrt{\rho\mathbf{V}\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2}$

$$\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 = \lambda(\mathbf{u}_1 \cdot \rho\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_2 \cdot \rho\mathbf{u}_1) ;$$

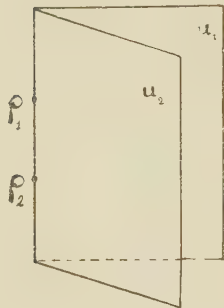
mais $\rho\mathbf{u}_2 = \rho\mathbf{u}_1 = -1$

puisque $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$ passent par ρ ; par suite $\lambda = -1$

et l'on trouve $\sqrt{\rho\mathbf{q}} + \mathbf{p} = 0$ (135)

comme condition cherchée.

Relations entre les coordonnées RADIALES et AXIALES d'une MÊME droite. — Si l'on compare les relations précédentes (134) et (135) aux équations du rayon (130) et de l'axe (131), on constate qu'il suffit de remplacer $\mathbf{m}$ par $\mathbf{q}$ et $\mathbf{n}$ par $\mathbf{p}$; ce fait est général, car *les coordonnées radiales et axiales sont proportionnelles*. En effet, on a (132) :



$$\mathbf{u}_1\mathbf{m} = 0 \quad \mathbf{u}_2\mathbf{m} = 0 .$$

Par suite $\mathbf{m} = \lambda \sqrt{\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2} = \lambda\mathbf{q}$.

D'ailleurs (135) $\sqrt{\rho_2\mathbf{q}} + \mathbf{p} = 0$. Remplaçons $\mathbf{q}$ par sa valeur $\frac{\mathbf{m}}{\lambda}$ et multiplions par λ , il vient :

$$\sqrt{\rho_1\mathbf{m}} + \lambda\mathbf{p} = 0 .$$

Comparant cette relation avec (130) : $\sqrt{\rho_1\mathbf{m}} + \mathbf{n} = 0$ on voit que $\mathbf{n} = \lambda\mathbf{p}$. c. q. f. d.

Comme conséquence, on trouvera d'une manière simple les coordonnées de certaines droites particulières.

Un rayon passe par l'origine lorsque $\sqrt{\rho_1\rho_2} = 0$; une telle droite aura donc pour coordonnées $(\mathbf{m}, 0)$. Une droite de l'infini a pour coordonnées $(0, \mathbf{n})$.

Point à l'infini dans une direction donnée ρ_1 .

t_1 et t_2 étant des scalaires, nous pouvons remplacer ρ_1 et ρ_2

Un axe passant par l'origine a pour coordonnées $(0, \mathbf{q})$.

Un tel axe est rejeté à l'infini lorsque $\sqrt{\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2} = 0$ (105) ; un tel axe aura donc pour coordonnées $(\mathbf{p}, 0)$.

Plan passant par l'origine, perpendiculaire à une direction donnée $\mathbf{u}_1$.

t_1 et t_2 étant des scalaires, nous pouvons remplacer $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$

par $\frac{\rho_1}{t_1}$ et $\frac{\rho_2}{t_2}$;

les coordonnées radiales deviennent alors

$$\frac{t_2 \rho_1 - t_1 \rho_2}{t_1 t_2} \text{ et } \sqrt{\frac{\rho_1 \rho_2}{t_1 t_2}}$$

ou simplement

$$t_2 \rho_1 - t_1 \rho_2 \text{ et } \sqrt{\rho_1 \rho_2} .$$

Cela étant, posons $t_2 = 1$ et faisons tendre t_1 vers 0 ; à la limite on obtient le point à l'infini dans la direction ρ_1 ; il est caractérisé par les deux vecteurs

$$\mathbf{m} = \rho_1 \quad \mathbf{n} = \sqrt{\rho_1 \rho_2} . \quad (136)$$

par $\frac{u_1}{t_1}$ et $\frac{u_2}{t_2}$;

les coordonnées axiales deviennent alors

$$\frac{t_2 u_1 - t_1 u_2}{t_1 t_2} \text{ et } \sqrt{\frac{u_1 u_2}{t_1 t_2}}$$

ou simplement

$$t_2 u_1 - t_1 u_2 \text{ et } \sqrt{u_1 u_2} .$$

Cela étant, posons $t_2 = 1$ et faisons tendre t_1 vers 0 ; à la limite on obtient le plan passant par l'origine normal à u_1 ; il est caractérisé par les deux vecteurs

$$\mathbf{p} = u_1 \quad \mathbf{q} = \sqrt{u_1 u_2} . \quad (137)$$

Transformation de coordonnées.

Nous avons vu ce que deviennent les coordonnées d'un point et d'un plan lorsqu'on effectue divers changements de coordonnées ; voyons ce que deviennent dans tous ces cas les coordonnées radiales et axiales d'une droite.

1) **Changement d'origine.** — Si

$$\rho = \rho_0 + \rho' , \quad \text{on a :}$$

$$\mathbf{m} = \rho_1 - \rho_2 = \rho'_1 - \rho'_2 = \mathbf{m}' , \quad (138)$$

$$\mathbf{n} = \sqrt{\rho_1 \rho_2}$$

$$= \sqrt{\rho'_1 \rho'_2} + \sqrt{(\rho'_1 - \rho'_2) \rho_0} = \mathbf{n}' - \sqrt{\rho_0 \mathbf{m}'} \quad (140)$$

Mais dans ce cas $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}'}{1 - \rho_0 \mathbf{u}'}$; d'où

$$\mathbf{p} = u_1 - u_2 = \frac{u'_1}{1 - \rho_0 u'_1} - \frac{u'_2}{1 - \rho_0 u'_2}$$

$$* \equiv u'_1 - u'_2 - u'_1 \cdot \rho_0 u'_2 + u'_2 \cdot \rho_0 u'_1$$

$$= u'_1 - u'_2 - \sqrt{\rho_0} \sqrt{u'_1 u'_2} = \mathbf{p}' - \sqrt{\rho_0} \mathbf{q}'$$

$$\mathbf{q} = \sqrt{u_1 u_2} \equiv \sqrt{u'_1 u'_2} = \mathbf{q}' .$$

1) **Changement d'origine.** — Si

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}' , \quad \text{on a :}$$

$$\mathbf{p} = u_1 - u_2 = u'_1 - u'_2 = \mathbf{p}' \quad (139)$$

$$\mathbf{q} = \sqrt{u_1 u_2}$$

$$= \sqrt{u'_1 u'_2} + \sqrt{(u'_1 - u'_2) u_0} = \mathbf{q}' - \sqrt{u_0 \mathbf{p}'} \quad (141)$$

Mais dans ce cas $\rho = \frac{\rho'}{1 - \rho' u_0}$; d'où

$$\mathbf{m} = \rho_1 - \rho_2 = \frac{\rho'_1}{1 - u_0 \rho'_1} - \frac{\rho'_2}{1 - u_0 \rho'_2}$$

$$\equiv \rho'_1 - \rho'_2 - \rho'_1 \cdot u_0 \rho'_2 + \rho'_2 \cdot u_0 \rho'_1$$

$$= \rho'_1 - \rho'_2 - \sqrt{u_0} \sqrt{\rho'_1 \rho'_2} = \mathbf{m}' - \sqrt{u_0} \mathbf{n}'$$

$$\mathbf{n} = \sqrt{\rho_1 \rho_2} \equiv \sqrt{\rho'_1 \rho'_2} = \mathbf{n}' .$$

* Pour plus de brièveté nous employons le signe $\equiv$ pour indiquer la proportionnalité.

Inversement si $\rho' = \rho_0 - \rho$, on aura :

$$m' = m \quad \text{et} \quad n' = \sqrt{\rho_0} m + n.$$

Dans ce cas : $u' = \frac{u}{\rho_0 u + 1}$, d'où :

$$p' = p + \sqrt{\rho_0} q \quad q' = q.$$

2) Transformation dyadique.

Si $\rho' = \Phi \rho$,
on a :

$$m' = \rho'_1 - \rho'_2 = \Phi \rho_1 - \Phi \rho_2 = \Phi(\rho_1 - \rho_2) = \Phi m \quad (142)$$

$$n' = \sqrt{\rho'_1 \rho'_2} = \sqrt{\Phi \rho_1 \Phi \rho_2} = \Phi_2 \sqrt{\rho_1 \rho_2} = \Phi_2 n.$$

Mais dans ce cas (122) u devient

$$u' = \Phi_c^{-1} u, \quad \text{d'où :}$$

$$p' = u'_1 - u'_2 \\ = \Phi^{-1} u_1 - \Phi_c^{-1} u_2 = \Phi_c^{-1} (u_1 - u_2) = \Phi_c^{-1} p$$

$$q' = \sqrt{u'_1 u'_2} \\ = \sqrt{\Phi^{-1} u_1 \Phi_c^{-1} u_2} = \Phi_{2c}^{-1} \sqrt{u_1 u_2} = \Phi_{2c}^{-1} q.$$

Inversement si $\rho = \Phi^{-1} \rho'$ on trouve aisément :

$$m = \Phi^{-1} m' \quad \text{et} \quad n = \Phi_2^{-1} n'.$$

D'ailleurs dans ce cas $u = \Phi_c u'$;
par suite : $p = \Phi_c p'$ et $q = \Phi_{2c} q'$.

3) Transformation générale.

Si $\rho' = \rho_0 + \Phi \rho$,
on a :

$$m' = \rho'_1 - \rho'_2 = \Phi \rho_1 - \Phi \rho_2 = \Phi m \quad (144)$$

$$n' = \sqrt{\rho'_1 \rho'_2} = \sqrt{(\rho_0 + \Phi \rho_1)(\rho_0 + \Phi \rho_2)} \\ = \sqrt{\Phi \rho_1 \Phi \rho_2} - \sqrt{\rho_0 \Phi(\rho_1 - \rho_2)} \\ = \Phi_2 n - \sqrt{\rho_0} \Phi m. \quad (146)$$

Mais alors (126)

$$u' = \frac{\Phi_c^{-1} u}{1 - \rho_0 \Phi_c^{-1} u} ;$$

Inversement si $u' = u_0 - u$, on aura :

$$p' = p \quad \text{et} \quad q' = \sqrt{u_0} p + q$$

Dans ce cas : $\rho' = \frac{\rho}{1 + \rho u_0}$, d'où :

$$m' = m + \sqrt{u_0} n \quad n' = n$$

2) Transformation dyadique.

Si $u' = \Phi u$
on a :

$$p' = u'_1 - u'_2 = \Phi u_1 - \Phi u_2 = \Phi(u_1 - u_2) = \Phi p \quad (143)$$

$$q' = \sqrt{u'_1 u'_2} = \sqrt{\Phi u_1 \Phi u_2} = \Phi_2 \sqrt{u_1 u_2} = \Phi_2 q.$$

Mais dans ce cas (123) ρ devient

$$\rho' = \Phi_c^{-1} \rho, \quad \text{d'où :}$$

$$m' = \rho'_1 - \rho'_2 \\ = \Phi_c^{-1} \rho_1 - \Phi_c^{-1} \rho_2 = \Phi_c^{-1} (\rho_1 - \rho_2) = \Phi_c^{-1} m$$

$$n' = \sqrt{\rho'_1 \rho'_2} \\ = \sqrt{\Phi_c^{-1} \rho_1 \Phi_c^{-1} \rho_2} = \Phi_{2c}^{-1} \sqrt{\rho_1 \rho_2} = \Phi_{2c}^{-1} n.$$

Inversement si $u = \Phi^{-1} u'$ on trouve aisément :

$$p = \Phi^{-1} p' \quad \text{et} \quad q = \Phi_2^{-1} q'.$$

D'ailleurs dans ce cas $\rho = \Phi_c \rho'$; par suite : $m = \Phi_c m'$ et $n = \Phi_{2c} n'$.

3) Transformation générale.

Si $u' = u_0 + \Phi u$,
on a :

$$p' = u'_1 - u'_2 = \Phi u_1 - \Phi u_2 = \Phi p \quad (145)$$

$$q' = \sqrt{u'_1 u'_2} = \sqrt{(u_0 + \Phi u_1)(u_0 + \Phi u_2)} \\ = \sqrt{\Phi u_1 \Phi u_2} - \sqrt{u_0 \Phi(u_1 - u_2)} \\ = \Phi_2 q - \sqrt{u_0} \Phi p. \quad (147)$$

Mais alors (127)

$$\rho' = \frac{\Phi_c^{-1} \rho}{1 - u_0 \Phi_c^{-1} \rho} ;$$

d'où l'on tire :

$$\begin{aligned} \mathbf{p}' &= \mathbf{u}'_1 - \mathbf{u}'_2 = \frac{\Phi_c^{-1} \mathbf{u}_1}{1 - \rho_0 \Phi_c^{-1} \mathbf{u}_1} - \frac{\Phi_c^{-1} \mathbf{u}_2}{1 - \rho_0 \Phi_c^{-1} \mathbf{u}_2} \\ &\equiv \Phi_c^{-1} (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) - \Phi_c^{-1} \mathbf{u}_1 \rho_0 \Phi_c^{-1} \mathbf{u}_2 + \Phi_c^{-1} \mathbf{u}_2 \rho_0 \Phi_c^{-1} \mathbf{u}_1 \\ &= \Phi_c^{-1} \mathbf{p} - \sqrt{\rho_0} \sqrt{\Phi_c^{-1} \mathbf{u}_1 \Phi_c^{-1} \mathbf{u}_2} \\ &= \Phi_c^{-1} \mathbf{p} - \sqrt{\rho_0} \Phi_{2c}^{-1} \mathbf{q} \\ \mathbf{q}' &= \sqrt{\mathbf{u}'_1 \mathbf{u}'_2} \equiv \sqrt{\Phi_c^{-1} \mathbf{u}_1 \Phi_c^{-1} \mathbf{u}_2} = \Phi_{2c}^{-1} \mathbf{q} . \end{aligned}$$

Inversement si $\mathbf{p} = \Phi^{-1}(\mathbf{p}' - \rho_0)$ on trouve aisément :

$$\mathbf{m} = \Phi^{-1} \mathbf{m}' \text{ et } \mathbf{n} = \Phi_{2c}^{-1} (\mathbf{n}' + \sqrt{\rho_0} \mathbf{m}') .$$

Mais dans cette transformation, on sait que

$$\mathbf{u} = \frac{\Phi_c \mathbf{u}'}{1 + \rho_0 \mathbf{u}'} , \text{ d'où l'on tire :}$$

$$\mathbf{p} = \Phi_c (\mathbf{p}' - \sqrt{\rho_0} \mathbf{q}') \text{ et } \mathbf{q} = \Phi_{2c} \mathbf{q}' .$$

d'où l'on tire :

$$\begin{aligned} \mathbf{m}' &= \mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}'_2 = \frac{\Phi_c^{-1} \rho_1}{1 - \mathbf{u}_0 \Phi_c^{-1} \rho_1} - \frac{\Phi_c^{-1} \rho_2}{1 - \mathbf{u}_0 \Phi_c^{-1} \rho_2} \\ &\equiv \Phi_c^{-1} (\rho_1 - \rho_2) - \Phi_c^{-1} \rho_1 \mathbf{u}_0 \Phi_c^{-1} \rho_2 + \Phi_c^{-1} \rho_2 \mathbf{u}_0 \Phi_c^{-1} \rho_1 \\ &= \Phi_c^{-1} \mathbf{m} - \sqrt{\mathbf{u}_0} \sqrt{\Phi_c^{-1} \rho_1 \Phi_c^{-1} \rho_2} \\ &= \Phi_c^{-1} \mathbf{m} - \sqrt{\mathbf{u}_0} \Phi_{2c}^{-1} \mathbf{n} \\ \mathbf{n}' &= \sqrt{\mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_2} \equiv \sqrt{\Phi_c^{-1} \rho_1 \Phi_c^{-1} \rho_2} = \Phi_{2c}^{-1} \mathbf{n} . \end{aligned}$$

Inversement si $\mathbf{u} = \Phi^{-1}(\mathbf{u}' - \mathbf{u}_0)$, on trouve aisément :

$$\mathbf{p} = \Phi^{-1} \mathbf{p}' \text{ et } \mathbf{q} = \Phi_{2c}^{-1} (\mathbf{q}' + \sqrt{\mathbf{u}_0} \mathbf{p}') .$$

Mais dans cette transformation, on sait que

$$\rho = \frac{\Phi_c \rho'}{1 + \rho' \mathbf{u}_0} , \text{ d'où l'on tire :}$$

$$\mathbf{m} = \Phi_c (\mathbf{m}' - \sqrt{\mathbf{u}_0} \mathbf{n}') \text{ et } \mathbf{n} = \Phi_{2c} \mathbf{n}' .$$

Problèmes sur deux droites.

L'angle θ de deux rayons est donné par

$$\sin \theta = \frac{|\mathbf{m}_1 \mathbf{m}_2|}{|\mathbf{m}_1| |\mathbf{m}_2|} \text{ ou } \cos \theta = \frac{\mathbf{m}_1 \mathbf{m}_2}{|\mathbf{m}_1| |\mathbf{m}_2|} .$$

Deux rayons sont *parallèles* si $\sqrt{\mathbf{m}_1 \mathbf{m}_2} = 0$, *perpendiculaires* si $\mathbf{m}_1 \mathbf{m}_2 = 0$.

Problème. — Le point d'intersection ρ_0 de deux droites D_1 et D_2 qui se coupent est la solution commune aux deux équations vectorielles

$$\begin{aligned} \sqrt{\rho_0 \mathbf{m}_1} + \mathbf{n}_1 &= 0 \\ \sqrt{\rho_0 \mathbf{m}_2} + \mathbf{n}_2 &= 0 . \end{aligned}$$

L'angle θ de deux axes est donné par

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2}}{|\mathbf{q}_1| |\mathbf{q}_2|} \text{ ou } \cos \theta = \frac{\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2}{|\mathbf{q}_1| |\mathbf{q}_2|} .$$

Deux axes sont *parallèles* si $\sqrt{\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2} = 0$, *perpendiculaires* si $\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2 = 0$.

Problème. — Le plan $\mathbf{u}_0$ de deux axes Δ_1 et Δ_2 qui se coupent est la solution commune aux deux équations vectorielles

$$\begin{aligned} \sqrt{\mathbf{u}_0 \mathbf{p}_1} + \mathbf{q}_1 &= 0 \\ \sqrt{\mathbf{u}_0 \mathbf{p}_2} + \mathbf{q}_2 &= 0 . \end{aligned}$$

Pour résoudre ces équations, multiplions la première par $\sqrt{n_2}$; on a :

$$\sqrt{n_2} \sqrt{\rho_0 m_1} + \sqrt{n_2 n_1} = 0$$

$$\text{ou } \rho_0 \cdot m_1 n_2 - m_1 \cdot \rho_0 n_2 + \sqrt{n_2 n_1} = 0$$

$$\text{mais } \rho_0 n_2 = 0$$

$$\text{d'où } \rho_0 = \frac{\sqrt{n_1 n_2}}{m_1 n_2} \quad (148)$$

C'est le point commun.

De même en multipliant la deuxième équation par $\sqrt{n_1}$, on aurait trouvé

$$\rho_0 = \frac{\sqrt{n_2 n_1}}{m_2 n_1} :$$

égalant les deux valeurs de ρ_0 on trouve :

$$m_{12} = m_1 n_2 + n_1 m_2 = 0. \quad (150)$$

C'est la condition pour que deux rayons se coupent.

Remarque. — Si $\sqrt{m_1 m_2} = 0$ ou si $\sqrt{n_1 n_2} = 0$, la relation (150) est évidemment vérifiée.

Corollaire. — Le point commun à deux axes qui se coupent est

$$\rho_0 = \frac{\sqrt{p_1 p_2}}{q_1 p_2} = \frac{\sqrt{p_2 p_1}}{q_2 p_1}.$$

Signification géométrique de l'équation (150) : moment de deux rayons.

Définition. — On appelle moment m de deux vecteurs six fois le volume du tétraèdre construit sur ces deux vecteurs.

Soient D_1 et D_2 les deux rayons passant respectivement en ρ_1 et ρ_2 ; on a :

$$\begin{aligned} m &\equiv m_1 \sqrt{(\rho_1 - \rho_2) m_2} \\ &= m_2 \sqrt{m_1 \rho_1} + m_1 \sqrt{m_2 \rho_2} \\ &= m_2 n_1 + m_1 n_2. \end{aligned}$$

Pour résoudre ces équations, multiplions la première par $\sqrt{q_2}$; on a :

$$\sqrt{q_2} \sqrt{u_0 p_1} + \sqrt{q_2 q_1} = 0$$

$$\text{ou } u_0 \cdot p_1 q_2 - p_1 \cdot u_0 q_2 + \sqrt{q_2 q_1} = 0$$

$$\text{mais } u_0 q_2 = 0$$

$$\text{d'où } u_0 = \frac{\sqrt{q_1 q_2}}{p_1 q_2} \quad (149)$$

C'est le plan commun.

Mais en multipliant la deuxième équation par $\sqrt{q_1}$ on aurait trouvé

$$u_0 = \frac{\sqrt{q_2 q_1}}{p_2 q_1} :$$

égalant les deux valeurs de u_0 on a :

$$m_{12} = p_1 q_2 + q_1 p_2 = 0. \quad (151)$$

C'est la condition pour que deux axes soient dans un même plan.

Remarque. — Si $\sqrt{p_1 p_2} = 0$ ou si $\sqrt{q_1 q_2} = 0$, la relation (151) est évidemment vérifiée.

Corollaire. — Le plan de deux rayons qui se coupent a pour vecteur

$$u_0 = \frac{\sqrt{m_1 m_2}}{n_1 m_2} = \frac{\sqrt{m_2 m_1}}{n_2 m_1}.$$

Signification géométrique de l'équation (151) : moment de deux axes.

Soient Δ_1 et Δ_2 les deux axes situés respectivement dans u_1 et u_2 ; on a :

$$\begin{aligned} m &\equiv p_1 \sqrt{(u_1 - u_2) p_2} \\ &= p_2 \sqrt{p_1 u_1} + p_1 \sqrt{p_2 u_2} \\ &= p_2 q_1 + p_1 q_2. \end{aligned}$$

Problème. — Perpendiculaire commune à $(\mathbf{m}_1, \mathbf{n}_1)$ et $(\mathbf{m}_2, \mathbf{n}_2)$.

1) La perpendiculaire cherchée $(\mathbf{m}, \mathbf{n})$ a pour direction $\mathbf{m} = \sqrt{\mathbf{m}_1 \mathbf{m}_2}$.

Le plan de $(\mathbf{m}_1, \mathbf{n}_1)$ et $(\mathbf{m}, \mathbf{n})$ a pour vecteur (149)

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\sqrt{\mathbf{m}_1 \mathbf{m}}}{\mathbf{n}_1 \mathbf{m}} = \frac{\sqrt{\mathbf{m}_1} \sqrt{\mathbf{m}_1 \mathbf{m}_2}}{[\mathbf{n}_1 \mathbf{m}_1 \mathbf{m}_2]}.$$

De même le plan de $(\mathbf{m}_2, \mathbf{n}_2)$ et $(\mathbf{m}, \mathbf{n})$ est donné par

$$\mathbf{u}_2 = \frac{\sqrt{\mathbf{m}_2} \sqrt{\mathbf{m}_1 \mathbf{m}_2}}{[\mathbf{n}_2 \mathbf{m}_1 \mathbf{m}_2]}.$$

La perpendiculaire cherchée aura donc pour coordonnées :

$$\mathbf{m} \equiv \sqrt{\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2} = \sqrt{\mathbf{m}_1 \mathbf{m}_2}$$

$$\mathbf{n} \equiv \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$$

$$= \frac{[\mathbf{n}_2 \mathbf{m}_1 \mathbf{m}_2] \sqrt{\mathbf{m}_1} \sqrt{\mathbf{m}_1 \mathbf{m}_2} - [\mathbf{n}_2 \mathbf{m}_1 \mathbf{m}_2] \sqrt{\mathbf{m}_2} \sqrt{\mathbf{m}_1 \mathbf{m}_2}}{(\sqrt{\mathbf{m}_1 \mathbf{m}_2})^2} \quad (152)$$

Problème. — Perpendiculaire commune à $(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1)$ et $(\mathbf{p}_2, \mathbf{q}_2)$.

1) La perpendiculaire cherchée $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ a pour direction $\mathbf{q} = \sqrt{\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2}$.

Le plan de $(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1)$ et $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ a pour vecteur (149)

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\sqrt{\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2}}{\mathbf{p}_1 \mathbf{q}} = \frac{\sqrt{\mathbf{q}_1} \sqrt{\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2}}{[\mathbf{p}_1 \mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2]}.$$

De même le plan de $(\mathbf{p}_2, \mathbf{q}_2)$ et $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ est donné par

$$\mathbf{u}_2 = \frac{\sqrt{\mathbf{q}_2} \sqrt{\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2}}{[\mathbf{p}_2 \mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2]}.$$

La perpendiculaire cherchée aura donc pour coordonnées :

$$\mathbf{p} = \frac{[\mathbf{p}_2 \mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2] \sqrt{\mathbf{q}_1} \sqrt{\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2} - [\mathbf{p}_1 \mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2] \sqrt{\mathbf{q}_2} \sqrt{\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2}}{(\sqrt{\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2})^2} \quad (153)$$

$$\mathbf{q} = \sqrt{\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2}.$$

* Voici la solution donnée par M. DANIELS dans ses notes :

Le premier des vecteurs indiquant la direction, est évidemment $\mathbf{m} = \sqrt{\mathbf{m}_1 \mathbf{m}_2}$.

Le second doit satisfaire à $\mathbf{m} \mathbf{n} = 0$; il est donc de la forme :

$$(1) \quad \mathbf{n} = \lambda_1 \mathbf{m}_1 + \lambda_2 \mathbf{m}_2.$$

Or, la droite $(\mathbf{m}, \mathbf{n})$ devant rencontrer les deux droites données, nous avons encore (150)

$$(2) \quad \lambda_1 \mathbf{m}_1 \mathbf{m}_1 + \lambda_2 \mathbf{m}_1 \mathbf{m}_2 + \mathbf{n}_1 \mathbf{m} = 0$$

$$(3) \quad \lambda_1 \mathbf{m}_2 \mathbf{m}_1 + \lambda_2 \mathbf{m}_2 \mathbf{m}_2 + \mathbf{n}_2 \mathbf{m} = 0$$

ou en éliminant λ_1 et λ_2 :

$$\begin{vmatrix} \mathbf{m}_1 & \mathbf{m}_2 & -\mathbf{n} \\ \mathbf{m}_1 \mathbf{m}_1 & \mathbf{m}_1 \mathbf{m}_2 & \mathbf{n}_1 \mathbf{m} \\ \mathbf{m}_2 \mathbf{m}_1 & \mathbf{m}_2 \mathbf{m}_2 & \mathbf{n}_2 \mathbf{m} \end{vmatrix} = 0$$

d'où nous tirons enfin :

$$\mathbf{n} = \frac{[\mathbf{n}_2 \mathbf{m}_1 \mathbf{m}_2] \cdot \sqrt{\mathbf{m}_1} \sqrt{\mathbf{m}_1 \mathbf{m}_2} - [\mathbf{n}_1 \mathbf{m}_1 \mathbf{m}_2] \cdot \sqrt{\mathbf{m}_2} \sqrt{\mathbf{m}_1 \mathbf{m}_2}}{(\sqrt{\mathbf{m}_1 \mathbf{m}_2})^2}.$$

2) Les points d'intersection ρ_1 et ρ_2 de $(\mathbf{m}, \mathbf{n})$ avec $(\mathbf{m}_1, \mathbf{n}_1)$ et $(\mathbf{m}_2, \mathbf{n}_2)$ sont :

$$\rho_1 = \frac{\sqrt{\mathbf{n}_1 \mathbf{n}}}{\mathbf{m}_1 \mathbf{n}}$$

$$= \frac{[\mathbf{n}_1 \mathbf{m}_1 \mathbf{m}_2] \cdot \mathbf{m}_2 - [\mathbf{n}_2 \mathbf{m}_1 \mathbf{m}_2] \cdot \mathbf{m}_1 - \mathbf{n}_1 \mathbf{m}_2 \cdot \sqrt{\mathbf{m}_1 \mathbf{m}_2}}{(\sqrt{\mathbf{m}_1 \mathbf{m}_2})^2}$$

$$\rho_2 = \frac{\sqrt{\mathbf{n}_2 \mathbf{n}}}{\mathbf{m}_2 \mathbf{n}}$$

$$= \frac{[\mathbf{n}_1 \mathbf{m}_1 \mathbf{m}_2] \cdot \mathbf{m}_2 - [\mathbf{n}_2 \mathbf{m}_1 \mathbf{m}_2] \cdot \mathbf{m}_1 + \mathbf{n}_2 \mathbf{m}_1 \cdot \sqrt{\mathbf{m}_1 \mathbf{m}_2}}{(\sqrt{\mathbf{m}_1 \mathbf{m}_2})^2}$$

3) La longueur de la perpendiculaire commune est :

$$|\rho_1 - \rho_2| = \frac{|\mathbf{n}_1 \mathbf{m}_2 + \mathbf{m}_1 \mathbf{n}_2|}{|\sqrt{\mathbf{m}_1 \mathbf{m}_2}|}$$

Les deux droites $(\mathbf{m}_1, \mathbf{n}_1)$ et $(\mathbf{m}_2, \mathbf{n}_2)$ se coupent si

$$\mathbf{n}_1 \mathbf{m}_2 + \mathbf{m}_1 \mathbf{n}_2 = 0 ; \quad (150)$$

condition déjà trouvée.

2) Les points d'intersection ρ_1 et ρ_2 de $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ avec $(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1)$ et $(\mathbf{p}_2, \mathbf{q}_2)$ sont :

$$\rho_1 = \frac{\sqrt{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}}}{\mathbf{q}_1 \mathbf{p}}$$

$$= \frac{[\mathbf{p}_1 \mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2] \cdot \mathbf{q}_2 - [\mathbf{p}_2 \mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2] \cdot \mathbf{q}_1 - \mathbf{p}_1 \mathbf{q}_2 \cdot \sqrt{\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2}}{(\sqrt{\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2})^2}$$

$$\rho_2 = \frac{\sqrt{\mathbf{p}_2 \mathbf{p}}}{\mathbf{q}_2 \mathbf{p}}$$

$$= \frac{[\mathbf{p}_1 \mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2] \cdot \mathbf{q}_2 - [\mathbf{p}_2 \mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2] \cdot \mathbf{q}_1 - \mathbf{p}_2 \mathbf{q}_1 \cdot \sqrt{\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2}}{(\sqrt{\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2})^2}$$

3) La longueur de la perpendiculaire commune est :

$$|\rho_1 - \rho_2| = \frac{|\mathbf{p}_1 \mathbf{q}_2 + \mathbf{p}_2 \mathbf{q}_1|}{|\sqrt{\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2}|}$$

Les deux droites $(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1)$ et $(\mathbf{p}_2, \mathbf{q}_2)$ se coupent si

$$\mathbf{p}_1 \mathbf{q}_2 + \mathbf{p}_2 \mathbf{q}_1 = 0 ; \quad (151)$$

condition déjà trouvée.

Point, plan, droite.

Condition pour qu'un point ρ soit sur $(\mathbf{m}, \mathbf{n})$. —

$\mathbf{a}$ étant un vecteur quelconque, un point arbitraire du plan déterminé par l'origine et $(\mathbf{m}, \mathbf{n})$ est fourni par le vecteur

$$\rho = \lambda \sqrt{\mathbf{n} \mathbf{a}} .$$

Calculons λ de telle sorte que ρ soit sur $(\mathbf{m}, \mathbf{n})$; on doit avoir :

$$\sqrt{\rho \mathbf{m}} + \mathbf{n} = 0$$

$$\text{ou} \quad \lambda \sqrt{\mathbf{m}} \sqrt{\mathbf{n} \mathbf{a}} - \mathbf{n} = 0$$

$$\lambda \mathbf{n} \cdot \mathbf{m} \mathbf{a} - \mathbf{n} = 0$$

$$\lambda = \frac{1}{\mathbf{m} \mathbf{a}}$$

$$\text{d'où} \quad \rho = \frac{\sqrt{\mathbf{n} \mathbf{a}}}{\mathbf{m} \mathbf{a}} . \quad (154)$$

Condition pour qu'un plan $\mathbf{n}$ passe par $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$. —

$\mathbf{a}$ étant un vecteur quelconque, un plan arbitraire coupant le plan déterminé par l'origine et $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ est fourni par le vecteur

$$\mathbf{u} = \lambda \sqrt{\mathbf{q} \mathbf{a}} .$$

Calculons λ de telle sorte que $\mathbf{u}$ passe par $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$; on doit avoir :

$$\sqrt{\mathbf{u} \mathbf{p}} + \mathbf{q} = 0$$

$$\text{ou} \quad \lambda \sqrt{\mathbf{p}} \sqrt{\mathbf{q} \mathbf{a}} - \mathbf{q} = 0$$

$$\lambda \mathbf{q} \cdot \mathbf{p} \mathbf{a} - \mathbf{q} = 0$$

$$\lambda = \frac{1}{\mathbf{p} \mathbf{a}}$$

$$\text{d'où} \quad \mathbf{u} = \frac{\sqrt{\mathbf{q} \mathbf{a}}}{\mathbf{p} \mathbf{a}} . \quad (155)$$

Corollaire. — Un point ρ de (p, q) satisfait à la relation

$$\rho = \frac{Vpa}{qa} \quad (156)$$

Problème. — Plan u déterminé par ρ et (m, n) . —

On a :

$$u = \frac{Vma}{na} \quad \text{et} \quad \rho \frac{Vma}{na} + 1 = 0.$$

La deuxième relation peut aussi s'écrire :

$$a(V\rho m + n) = 0;$$

elle montre que a est perpendiculaire à $V\rho m + n$, donc de la forme

$$a = Vb(V\rho m + n)$$

b étant un vecteur arbitraire. Substituons, il vient :

$$u = \frac{Vma}{na} = \frac{VmVb(V\rho m + n)}{nVb(V\rho m + n)}$$

$$\text{ou} \quad u = \frac{V\rho m + n}{-\rho n} \quad (158)$$

Remarque. — Si ρ est sur (m, n) le vecteur u est de la forme $\frac{0}{0}$; le plan cherché est indéterminé.

Corollaire. — Le plan déterminé par ρ et (p, q) a pour vecteur

$$u = \frac{V\rho q + p}{-\rho p} \quad (160)$$

Problème. — Par ρ_0 mener (m, n) perpendiculaire au plan u .

1) La première coordonnée donnant la direction de la droite cherchée est $m = u$ et l'équation de la droite cherchée est donc $V\rho u + n = 0$;

Corollaire. — Un plan u passant par (m, n) satisfait à la relation

$$u = \frac{Vma}{na} \quad (157)$$

Problème. — Point d'intersection ρ de u et (p, q) . —

On a :

$$\rho = \frac{Vpa}{qa} \quad \text{et} \quad u \frac{Vpa}{qa} + 1 = 0.$$

La deuxième relation peut aussi s'écrire :

$$a(Vup + q) = 0;$$

elle montre que a est perpendiculaire à $Vup + q$, donc de la forme

$$a = Vb(Vup + q)$$

b étant un vecteur arbitraire. Substituons, il vient :

$$\rho = \frac{Vpa}{qa} = \frac{VpVb(Vup + q)}{qVb(Vup + q)}$$

$$\text{ou} \quad \rho = \frac{Vup + q}{-uq} \quad (159)$$

Remarque. — Si u passe par (p, q) le vecteur ρ est de la forme $\frac{0}{0}$; il y a indétermination.

Corollaire. — Le point d'intersection de u avec (m, n) est donné par

$$\rho = \frac{Vun + m}{-um} \quad (161)$$

Problème. — Par ρ_0 mener (p, q) perpendiculaire au plan u .

1) La deuxième coordonnée donnant la direction de l'axe cherché est $q = u$ et l'équation de l'axe cherché est donc $V\rho u + p = 0$;

comme cette droite passe par ρ_0 , on a :

$$\sqrt{\rho_0 u + n} = 0$$

et $n = \sqrt{u \rho_0}$.

2) Le pied ρ de la perpendiculaire est donné (161) par

$$\rho = \frac{\sqrt{u} \sqrt{u \rho_0 + u}}{-u^2}$$

3) La longueur de la perpendiculaire au plan est donc :

$$\begin{aligned} |\rho_0 - \rho| &= \left| \rho_0 + \frac{u(\rho_0 u + 1) - \rho_0 u^2}{u^2} \right| \\ &= \frac{|u(\rho_0 u + 1)|}{u^2} = \frac{|\rho_0 u + 1|}{|u|} \end{aligned}$$

Problème. — Par ρ_0 mener une droite (m, n) qui coupe (m_0, n_0) à angle droit.

1) Le plan déterminé par ρ_0 et (m_0, n_0) a pour direction de la normale $\sqrt{\rho_0 m_0 + n_0}$;
par suite

$$m(\sqrt{\rho_0 m_0 + n_0}) = 0.$$

Mais on doit aussi avoir $mm_0 = 0$; on a donc

$$m = \sqrt{m_0}(\sqrt{\rho_0 m_0 + n_0}).$$

D'ailleurs ρ_0 doit être sur (m, n) , donc :

$$\sqrt{\rho_0 m} + n = 0$$

d'où $n = -\sqrt{\rho_0 m}$

$$- - \sqrt{\rho_0} \sqrt{m_0}(\sqrt{\rho_0 m_0 + n_0}).$$

2) Le pied ρ de la perpendiculaire trouvée a pour vecteur :

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{\sqrt{n n_0}}{m n_0} = \frac{\sqrt{n_0} \sqrt{\rho_0} \sqrt{m_0}(\sqrt{\rho_0 m_0 + n_0})}{n_0 \sqrt{m_0}(\sqrt{\rho_0 m_0 + n_0})} \\ &= \frac{\sqrt{n_0 m_0}}{m_0^2} + \frac{m_0 \rho_0}{m_0^2} \cdot m_0. \end{aligned}$$

comme cet axe passe par ρ_0 , on a :

$$\sqrt{\rho_0 u + p} = 0$$

et $p = \sqrt{u \rho_0}$.

2) Le pied ρ de la perpendiculaire est donné (159) par

$$\rho = \frac{\sqrt{u} \sqrt{u \rho_0 + u}}{-u^2}$$

Problème. — Par ρ_0 mener une droite (p, q) qui coupe (p_0, q_0) à angle droit.

1) Le plan déterminé par ρ_0 et (p_0, q_0) a pour direction de la normale $\sqrt{\rho_0 q_0 + p_0}$;
par suite

$$q(\sqrt{\rho_0 q_0 + p_0}) = 0.$$

Mais on doit aussi avoir $qq_0 = 0$; on a donc

$$q = \sqrt{q_0}(\sqrt{\rho_0 q_0 + p_0}).$$

D'ailleurs ρ_0 doit être sur (p, q) , donc :

$$\sqrt{\rho_0 q} + p = 0$$

d'où $p = -\sqrt{\rho_0 q}$

$$= -\sqrt{\rho_0} \sqrt{q_0}(\sqrt{\rho_0 q_0 + p_0}).$$

2) Le pied ρ de la perpendiculaire trouvée a pour vecteur :

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{\sqrt{p p_0}}{q p_0} = \frac{\sqrt{p_0} \sqrt{\rho_0} \sqrt{q_0}(\sqrt{\rho_0 q_0 + p_0})}{p_0 \sqrt{q_0}(\sqrt{\rho_0 q_0 + p_0})} \\ &= \frac{\sqrt{p_0 q_0}}{q_0^2} + \frac{q_0 \rho_0}{q_0^2} \cdot q_0. \end{aligned}$$

3) La longueur de la perpendiculaire $(\mathbf{m}, \mathbf{n})$ est

$$|\mathbf{p} - \mathbf{p}_0| = \frac{|\mathbf{V}\mathbf{m}_0(\mathbf{V}\mathbf{p}_0\mathbf{m}_0 + \mathbf{n}_0)|}{\mathbf{m}_0^2}.$$

Remarque I. — Si $\mathbf{p}_0 = 0$, le vecteur $\mathbf{p}$ est le pied de la perpendiculaire abaissée de l'origine; c'est donc :

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{V}\mathbf{n}_0\mathbf{m}_0}{\mathbf{m}_0^2}. \quad (162)$$

Comme conséquence, un point d'une droite $(\mathbf{m}, \mathbf{n})$ est de la forme

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{V}\mathbf{nm}}{\mathbf{m}^2} + x\mathbf{m}. \quad (164)$$

Remarque II. — On trouverait de même qu'un plan quelconque passant par $(\mathbf{m}, \mathbf{n})$ est de la forme :

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{V}\mathbf{mn}}{\mathbf{n}^2} + x\mathbf{n}. \quad (166)$$

3) La longueur de la perpendiculaire $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ est

$$|\mathbf{p} - \mathbf{p}_0| = \frac{|\mathbf{V}\mathbf{q}_0(\mathbf{V}\mathbf{p}_0\mathbf{q}_0 + \mathbf{p}_0)|}{\mathbf{q}_0^2}.$$

Remarque I. — Si $\mathbf{p}_0 = 0$, le vecteur $\mathbf{p}$ est le pied de la perpendiculaire abaissée de l'origine; c'est donc :

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{V}\mathbf{p}_0\mathbf{q}_0}{\mathbf{q}_0^2}. \quad (163)$$

Comme conséquence, un point d'un axe $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ est de la forme

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{V}\mathbf{pq}}{\mathbf{q}^2} + x\mathbf{q}. \quad (165)$$

Remarque II. — On trouverait de même qu'un plan quelconque passant par $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ est donné par :

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{V}\mathbf{pq}}{\mathbf{p}^2} + x\mathbf{p}. \quad (167)$$

Ponctuelles et faisceaux de plans.

Un point quelconque de la ponctuelle déterminée par deux points $\mathbf{p}$ et $\mathbf{p}'$ est de la forme

$$\mathbf{p}_\lambda = \frac{\mathbf{p} - \lambda\mathbf{p}'}{1 - \lambda};$$

ce point vérifie la relation de Chasles :

$$\mathbf{V}\mathbf{pp}' + \mathbf{V}\mathbf{p}'\mathbf{p}_\lambda + \mathbf{V}\mathbf{p}_\lambda\mathbf{p} = 0.$$

Pour avoir la signification de λ , remplaçons $\mathbf{p}_\lambda$ par sa valeur dans l'expression suivante :

$$\frac{|\mathbf{V}\mathbf{pp}_\lambda|}{|\mathbf{V}\mathbf{p}'\mathbf{p}_\lambda|} = \frac{-\lambda|\mathbf{V}\mathbf{pp}'|}{-|\mathbf{V}\mathbf{pp}'|} = \lambda; \text{ d'autre part}$$

$$\frac{|\mathbf{V}\mathbf{pp}_\lambda|}{|\mathbf{V}\mathbf{p}'\mathbf{p}_\lambda|} = \frac{|\mathbf{p}_\lambda - \mathbf{p}|}{|\mathbf{p}_\lambda - \mathbf{p}'|} \equiv (\mathbf{pp}'\mathbf{p}_\lambda) = \lambda$$

Un plan quelconque du faisceau déterminé par deux plans $\mathbf{u}$ et $\mathbf{u}'$ est de la forme

$$\mathbf{u}_\lambda = \frac{\mathbf{u} - \lambda\mathbf{u}'}{1 - \lambda};$$

ce plan vérifie la relation de Chasles :

$$\mathbf{V}\mathbf{uu}' + \mathbf{V}\mathbf{u}'\mathbf{u}_\lambda + \mathbf{V}\mathbf{u}_\lambda\mathbf{u} = 0.$$

Pour avoir la signification de λ , remplaçons $\mathbf{u}_\lambda$ par sa valeur dans l'expression suivante :

$$\frac{|\mathbf{V}\mathbf{uu}_\lambda|}{|\mathbf{V}\mathbf{u}'\mathbf{u}_\lambda|} = \frac{-\lambda|\mathbf{V}\mathbf{uu}'|}{-|\mathbf{V}\mathbf{uu}'|} = \lambda; \text{ d'autre part}$$

$$\frac{|\mathbf{V}\mathbf{uu}_\lambda|}{|\mathbf{V}\mathbf{u}'\mathbf{u}_\lambda|} = \frac{|\mathbf{u}_\lambda - \mathbf{u}|}{|\mathbf{u}_\lambda - \mathbf{u}'|} \equiv (\mathbf{uu}'\mathbf{u}_\lambda) = \lambda$$

λ est donc le rapport des distances de ρ_λ aux points fondamentaux ρ et ρ' .

Si un quatrième point ρ_μ est situé sur (ρ, ρ') on a :

$$\mu = (\rho\rho'\rho_\mu).$$

Le rapport anharmonique des quatre points est :

$$(\rho\rho'\rho_\lambda\rho_\mu) = \frac{(\rho\rho'\rho_\lambda)}{(\rho\rho'\rho_\mu)} - \frac{\lambda}{\mu}.$$

Au lieu des quatre points ci-dessus, prenons les quatre points

$$\rho_i = \rho + \lambda_i \rho' \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Si alors on prend ρ_1 et ρ_2 comme points fondamentaux, on trouve aisément :

$$(\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4) = \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3} : \frac{\lambda_1 - \lambda_4}{\lambda_2 - \lambda_4} - (\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4).$$

Remarque. — Le rapport des quatre points est *harmonique* si

$$(\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4) = -1.$$

$$= \frac{uu_\lambda \sin(\mathbf{u}, \mathbf{u}_\lambda)}{u'u_\lambda \sin(\mathbf{u}', \mathbf{u}_\lambda)}.$$

$$\text{mais} \quad |\mathbf{u}| = \frac{1}{|\mathbf{N}|}$$

$$\text{d'où} \quad \lambda = \frac{|\mathbf{N}'| \sin(\mathbf{u}, \mathbf{u}_\lambda)}{|\mathbf{N}| \sin(\mathbf{u}', \mathbf{u}_\lambda)}.$$

λ est donc, à une constante près, le rapport des sinus des angles de $\mathbf{u}_\lambda$ avec $\mathbf{u}$ et $\mathbf{u}'$.

Si un quatrième plan passe par l'axe $(\mathbf{u}, \mathbf{u}')$ du faisceau, on a :

$$\mu = (\mathbf{u}\mathbf{u}'\mathbf{u}_\mu) = \frac{|\mathbf{N}'| \sin(\mathbf{u}, \mathbf{u}_\mu)}{|\mathbf{N}| \sin(\mathbf{u}', \mathbf{u}_\mu)}.$$

Le rapport anharmonique des quatre plans est :

$$(\mathbf{u}\mathbf{u}'\mathbf{u}_\lambda\mathbf{u}_\mu) = \frac{(\mathbf{u}\mathbf{u}'\mathbf{u}_\lambda)}{(\mathbf{u}\mathbf{u}'\mathbf{u}_\mu)} = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Au lieu des quatre plans ci-dessus, prenons les quatre plans

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{u} + \lambda_i \mathbf{u}' \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Si alors on prend $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$ comme plans fondamentaux, on trouve aisément :

$$(\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2\mathbf{u}_3\mathbf{u}_4) = \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3} : \frac{\lambda_1 - \lambda_4}{\lambda_2 - \lambda_4} - (\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4).$$

Remarque. — Le faisceau est *harmonique* si

$$(\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2\mathbf{u}_3\mathbf{u}_4) = -1.$$

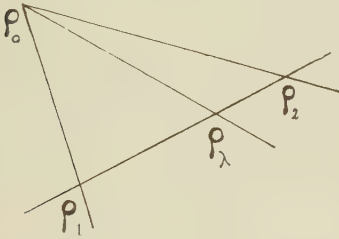
Faisceaux de droites.

Soient $D_1(\rho_0, \rho_1)$ et $D_2(\rho_0, \rho_2)$ deux droites qui se coupent en ρ_0 ; posons :

$\mathbf{m}_i = \rho_0 - \rho_i$ et $\mathbf{n}_i = \sqrt{\rho_0 \rho_i}$,
on a alors évidemment :

$$D_1(\rho_0, \rho_1) = D_1(\mathbf{m}_1, \mathbf{n}_1)$$

c'est-à-dire que la droite déterminée



par ρ_0 et ρ_1 est la même que celle qui a $(\mathbf{m}_1, \mathbf{n}_1)$ pour coordonnées radiales.

De même

$$D_2(\rho_0, \rho_2) = D_2(\mathbf{m}_2, \mathbf{n}_2) .$$

De plus :

$$\begin{aligned} D_\lambda(\rho_0, \rho_\lambda) &= D_\lambda\left(\rho_0 - \frac{\rho_1 - \lambda \rho_2}{1 - \lambda}, \sqrt{\rho_0 \frac{\rho_1 - \lambda \rho_2}{1 - \lambda}}\right) \\ &= D_\lambda\left(\frac{\mathbf{m}_1 - \lambda \mathbf{m}_2}{1 - \lambda}, \frac{\mathbf{n}_1 - \lambda \mathbf{n}_2}{1 - \lambda}\right) = D_\lambda(\mathbf{m}_\lambda, \mathbf{n}_\lambda) . \end{aligned}$$

D'ailleurs $(\mathbf{m}_\lambda, \mathbf{n}_\lambda)$ sont bien les coordonnées d'une droite, car si D_1 coupe D_2 on a :

$$\mathbf{m}_\lambda \mathbf{n}_\lambda = \mathbf{m}_1 \mathbf{n}_1 - \lambda (\mathbf{m}_1 \mathbf{n}_2 + \mathbf{m}_2 \mathbf{n}_1) + \lambda^2 \mathbf{m}_2 \mathbf{n}_2 = 0$$

Si l'on considère une quatrième droite

$$D_\mu(\rho_0, \rho_\mu) = D_\mu(\mathbf{m}_\mu, \mathbf{n}_\mu)$$

on a :

$$(\rho_1 \rho_2 \rho_\lambda \rho_\mu) = (D_1 D_2 D_\lambda D_\mu) .$$

Soient $\Delta_1(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1)$ et $\Delta_2(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_2)$ deux droites qui se coupent dans le plan $\mathbf{u}_0$; posons :

$\mathbf{p}_i = \mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_i$ et $\mathbf{q}_i = \sqrt{\mathbf{u}_0 \mathbf{u}_i}$
on a évidemment :

$$\Delta_1(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1) = \Delta_1(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1)$$

c'est-à-dire que la droite déterminée par $\mathbf{u}_0$ et $\mathbf{u}_1$ est la même que celle qui a $(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1)$ pour coordonnées axiales.

De même

$$\Delta_2(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_2) = \Delta_2(\mathbf{p}_2, \mathbf{q}_2) .$$

De plus :

$$\begin{aligned} \Delta_\lambda(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_\lambda) &= \Delta_\lambda\left(\mathbf{u}_0 - \frac{\mathbf{u}_1 - \lambda \mathbf{u}_2}{1 - \lambda}, \sqrt{\mathbf{u}_0 \frac{\mathbf{u}_1 - \lambda \mathbf{u}_2}{1 - \lambda}}\right) \\ &= \Delta_\lambda\left(\frac{\mathbf{p}_1 - \lambda \mathbf{p}_2}{1 - \lambda}, \frac{\mathbf{q}_1 - \lambda \mathbf{q}_2}{1 - \lambda}\right) = \Delta_\lambda(\mathbf{p}_\lambda, \mathbf{q}_\lambda) . \end{aligned}$$

D'ailleurs $(\mathbf{p}_\lambda, \mathbf{q}_\lambda)$ sont bien les coordonnées d'une droite, car, si Δ_1 coupe Δ_2 on a :

$$\mathbf{p}_\lambda \mathbf{q}_\lambda = \mathbf{p}_1 \mathbf{q}_1 - \lambda (\mathbf{p}_1 \mathbf{q}_2 + \mathbf{p}_2 \mathbf{q}_1) + \lambda^2 \mathbf{p}_2 \mathbf{q}_2 = 0$$

Si l'on considère une quatrième droite

$$\Delta_\mu(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_\mu) = \Delta_\mu(\mathbf{p}_\mu, \mathbf{q}_\mu) ,$$

on a :

$$(\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_\lambda \mathbf{u}_\mu) = (\Delta_1 \Delta_2 \Delta_\lambda \Delta_\mu) .$$

Supposons que ρ_i soit contenu dans u_i et que le sommet ρ_o du faisceau des droites D_i soit l'intersection du plan u_o de Δ_i avec l'axe du faisceau de plans u_i ; comme

$$(D_1 D_2 D_\lambda D_\mu) = (\Delta_1 \Delta_2 \Delta_\lambda \Delta_\mu)$$

on aura, quel que soit ρ_o sur l'axe (u_1, u_2)

$$(\rho_1 \rho_2 \rho_\lambda \rho_\mu) = (u_1 u_2 u_\lambda u_\mu) .$$

C'est le théorème de Pappus.

Gerbe de droites.

Une gerbe de droites se compose de toutes (∞^2) les droites qui passent par un point ρ_o appelé sommet de la gerbe. Toutes ces droites satisfont à la relation

$$\vee \rho_o m + n = 0 .$$

Théorème. — Si trois droites appartiennent à une même gerbe, on peut trouver des nombres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que

$$\lambda_1 n_1 + \lambda_2 n_2 + \lambda_3 n_3 = 0 .$$

Supposons que le sommet de la gerbe ne soit pas rejeté à l'infini ; alors $[m_1 m_2 m_3] \neq 0$. Le point d'intersection ρ_{23} de D_2 et D_3 étant sur D_1 , on a :

$$\vee \rho_{23} m_1 + n_1 = 0$$

$$\text{ou } \vee m_1 \vee n_2 n_3 = n_1 \cdot m_2 n_3$$

$$\text{ou } n_1 \cdot m_2 n_3 - n_2 \cdot m_1 n_3 + n_3 \cdot m_1 n_2 = 0$$

c. q. f. d.

Corollaire. — A fortiori a-t-on

$$[n_1 n_2 n_3] = 0 .$$

Un champ de droites se compose de toutes (∞^2) les droites situées dans un plan u_o appelé plan du champ. Toutes ces droites vérifient la relation

$$\vee u_o p + q = 0 .$$

Théorème. — Si trois droites appartiennent à un même champ, on peut trouver des nombres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que

$$\lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2 + \lambda_3 q_3 = 0 .$$

Supposons que le plan du champ ne passe pas par l'origine ; alors $[p_1 p_2 p_3] \neq 0$. Le plan u_{23} de D_2 et D_3 passant par D_1 , on a :

$$\vee u_{23} p_1 + q_1 = 0$$

$$\text{ou } \vee p_1 \vee q_2 q_3 = q_1 \cdot p_2 q_3$$

$$\text{ou } q_1 \cdot p_2 q_3 - q_2 \cdot p_1 q_3 + q_3 \cdot p_1 q_2 = 0$$

c. q. f. d.

Corollaire. — A fortiori a-t-on

$$[q_1 q_2 q_3] = 0 .$$

II. QUADRIQUES

Equation, centre.

L'équation scalaire la plus générale, du deuxième degré en ρ , peut toujours être ramenée à la forme $f(\rho) = \rho\Phi\rho + 2A\rho + a = 0$ (168) où Φ est une dyadique quelconque, A un vecteur constant et a une quantité scalaire donnée. Mais (73)

$$\Phi = \frac{\Phi + \Phi_c}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\Phi_v} :$$

par suite, en formant l'expression $\rho\Phi\rho$, le terme $[\rho\Phi_v\rho]$ s'annule, et l'on voit que l'on peut toujours prendre Φ auto-conjugué; c'est ce que nous supposerons dans la suite.

Dans l'équation (168) faisons le changement d'origine :

$$\rho = \rho_0 + \rho' :$$

il vient :

$$f(\rho_0 + \rho') = (\rho_0 + \rho')\Phi(\rho_0 + \rho') + 2A(\rho_0 + \rho') + a = 0 \quad (170)$$

ou

$$\rho'\Phi\rho' + 2(\Phi\rho_0 + A)\rho' + f(\rho_0) = 0. \quad (172)$$

Pour qu'un point ρ_0 soit centre, il faut qu'en changeant ρ' en $-\rho'$ l'équation (172) soit satisfaisante, quel que soit ρ' ; cela exige que

$$\Phi\rho_0 + A = 0$$

$$\text{ou} \quad \rho_0 = -\Phi^{-1}A. \quad (174)$$

L'équation scalaire la plus générale, du deuxième degré en u , peut toujours être ramenée à la forme $g(u) = u\Psi u + 2Bu + b = 0$ (169) où Ψ est une dyadique quelconque, B un vecteur constant et b une quantité scalaire donnée. Mais (73)

$$\Psi = \frac{\Psi + \Psi_c}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\Psi_v} :$$

par suite, en formant l'expression $u\Psi u$, les termes $[u\Psi_v u]$ s'annule, et l'on voit que l'on peut toujours prendre Ψ auto-conjugué; c'est ce que nous supposerons dans la suite.

Dans l'équation (169) faisons le changement d'origine :

$$u = u' - \rho_0 \bar{u}' :$$

il vient :

$$g\left(u' - \rho_0 \bar{u}'\right) = u'\Psi u' + 2Bu'(1 - \rho_0 \bar{u}') + b(1 - \rho_0 \bar{u}')^2 = 0 \quad (171)$$

ou

$$u'\Psi u' - 2Bu' \cdot \rho_0 \bar{u}' + b(\rho_0 \bar{u}')^2 - 2[B \cdot \rho_0]u' + b = 0 \quad (173)$$

Pour qu'un point ρ_0 soit centre, il faut qu'en changeant u' en $-u'$ l'équation (173) soit satisfaite, quel que soit u' ; cela entraîne

$$B - b\rho_0 = 0$$

$$\text{ou} \quad \rho_0 = \frac{B}{b}. \quad (175)$$

C'est le vecteur du *centre*. Il est unique lorsque Φ est une dyadique complète *.

Prenons le centre pour origine et remarquons que $f(\rho_0)$ peut s'écrire

$$\rho_0(\Phi\rho_0 + \mathbf{A}) + \mathbf{A}\rho_0 + \mathbf{a}.$$

L'équation (172) devient alors :

$$\rho'\Phi\rho' + f(\rho_0) = 0 \quad (176)$$

$$\text{ou} \quad \rho'\Phi\rho' + \mathbf{A}\rho_0 + \mathbf{a} = 0. \quad (176')$$

Dans l'équation (176') remplaçons ρ_0 par sa valeur tirée de (174); on a :

$$\rho'\Phi\rho' - \mathbf{A}\Phi^{-1}\mathbf{A} + \mathbf{a} = 0.$$

Comparant ce résultat avec la relation (176) on voit que

$$\begin{aligned} f(\rho_0) &= -\mathbf{A}\Phi^{-1}\mathbf{A} + \mathbf{a} \\ &= -\frac{\mathbf{A}\Phi_2\mathbf{A} - \mathbf{a}\Phi_3}{\Phi_3}. \end{aligned}$$

Si l'on ramène Φ_2 à la forme nonion on trouve que

$$-\mathbf{A}\Phi_2\mathbf{A} + \mathbf{a}\Phi_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - \mathbf{H}$$

en désignant les composantes de $\mathbf{A}$ par $a_{ii} \dots a_{ii}$ ($i = 1, 2, 3$) et prenant $a = a_{44}$; par suite l'équation (176) peut encore s'écrire :

$$\rho'\Phi\rho' + \frac{\mathbf{H}}{\Phi_3} = 0. \quad (176'')$$

C'est le vecteur du *centre*.

Prenons le centre pour origine et remarquons que l'on a :

$$-\mathbf{B}\mathbf{u}' \cdot \rho_0\mathbf{u}' + b(\rho_0\mathbf{u}')^2 = -\rho_0\mathbf{u}' \cdot (\mathbf{B} - b\rho_0)\mathbf{u}'$$

L'équation (173) devient alors :

$$\mathbf{u}'\Psi\mathbf{u}' - \mathbf{B}\mathbf{u}' \cdot \rho_0\mathbf{u}' + b = 0$$

$$\text{ou} \quad \mathbf{u}'\Psi\mathbf{u}' - \frac{\mathbf{B}\mathbf{u}' \cdot \mathbf{B}\mathbf{u}'}{b} + b = 0$$

$$\mathbf{u}'\left(\Psi - \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}{b}\right)\mathbf{u}' + b = 0. \quad (177)$$

* Pour les autres cas, voir plus loin la « réduction des quadriques ».

Plan polaire.

Théorème. — Si par un point fixe $\mathbf{r}$ on mène une sécante D , et si l'on prend le conjugué harmonique $\mathbf{R}$ de $\mathbf{r}$ par rapport aux points d'intersection M et M' de D avec la quadrique, le lieu des points $\mathbf{R}$ quand la droite D tourne autour de $\mathbf{r}$ est un plan, le *plan polaire* de $\mathbf{r}$. En effet, soit

$$\rho = \frac{\mathbf{r} + \lambda \mathbf{R}}{1 + \lambda}$$

un point situé sur la droite et sur la quadrique ; on aura :

$$f\left(\frac{\mathbf{r} + \lambda \mathbf{R}}{1 + \lambda}\right) = 0$$

$$\text{ou } f(\mathbf{r}) + 2\lambda f(\mathbf{r}, \mathbf{R}) + \lambda^2 f(\mathbf{R}) = 0, \quad (178)$$

en posant :

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = \mathbf{r} \Phi \mathbf{R} + \mathbf{A}(\mathbf{r} + \mathbf{R}) + a. \quad (180)$$

Pour que $\mathbf{R}$ soit conjugué harmonique de $\mathbf{r}$ par rapport à M et M' , il faut que

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = 0. \quad (182)$$

C'est le plan polaire de $\mathbf{r}$; son vecteur est

$$\mathbf{u}_r = \frac{\Phi \mathbf{r} + \mathbf{A}}{\mathbf{A} \mathbf{r} + a}. \quad (184)$$

Pôle.

Théorème. — Si par toute droite d d'un champ $\mathbf{v}$ on mène deux plans tangents P et P' à la quadrique et si l'on prend le conjugué harmonique $\mathbf{w}$ de $\mathbf{v}$ par rapport à ces deux plans, le plan $\mathbf{w}$ passe par un point fixe, le *pôle* de $\mathbf{v}$.

En effet, soit

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v} + \lambda \mathbf{w}}{1 + \lambda}$$

un plan passant par la droite d du champ $\mathbf{v}$ et tangent à la quadrique ; on aura :

$$g\left(\frac{\mathbf{v} + \lambda \mathbf{w}}{1 + \lambda}\right) = 0$$

$$\text{ou } g(\mathbf{v}) + 2\lambda g(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + \lambda^2 g(\mathbf{w}) = 0, \quad (179)$$

en posant :

$$g(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{v} \Psi \mathbf{w} + \mathbf{B}(\mathbf{v} + \mathbf{w}) + b. \quad (181)$$

Pour que $\mathbf{w}$ soit conjugué harmonique de $\mathbf{v}$ par rapport à P et P' , il faut que

$$g(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0. \quad (183)$$

C'est le pôle de $\mathbf{v}$; son vecteur est

$$\rho_v = \frac{\Psi \mathbf{v} + \mathbf{B}}{\mathbf{B} \mathbf{v} + b}. \quad (185)$$

Propriétés.

1) Si par $\mathbf{r}$ on peut mener des tangentes à la quadrique, les points d'intersection de ces droites avec le

1) Si dans $\mathbf{v}$ on peut mener des tangentes réelles à la quadrique, les plans menés par ces droites et le

plan polaire définissent la courbe des contacts, car lorsque les points M et M' sont confondus, le point R se confond avec chacun d'eux.

2) Comme Φ est auto-conjugué, on peut permuter R et r dans (180) et l'on a :

$$f(R, r) = f(r, R) = 0$$

c'est-à-dire que les plans polaires de tous les points R d'un plan passent par le pôle r de ce plan.

3) Si un point r décrit une droite, son plan polaire tourne autour d'une droite fixe.

En effet, le plan polaire du point

$$r = \frac{r_1 + \lambda r_2}{1 + \lambda} \quad \text{est} \quad f(r, R) = 0$$

$$\text{ou} \quad f(r_1, R) + \lambda f(r_2, R) = 0 ;$$

il tourne donc autour de la droite d'intersection des plans polaires de r_1 et r_2 . Ces deux droites sont dites *conjuguées*.

Proposons-nous de calculer les coordonnées radiales de ces deux conjuguées. Pour cela posons

$$m = r_1 - r_2 \quad \text{et} \quad n = \sqrt{r_1 r_2} ;$$

sa conjuguée sera donnée par

$$m' = \sqrt{\left(\frac{\Phi r_1 + A}{A r_1 + a} \right) \left(\frac{\Phi r_2 + A}{A r_2 + a} \right)} \quad (186)$$

$$\text{et} \quad n' = \frac{\Phi r_1 + A}{A r_1 + a} - \frac{\Phi r_2 + A}{A r_2 + a}$$

pôle enveloppent le cône circonscrit, car lorsque les plans tangents menés par une droite d de v sont confondus, le plan w se confond avec chacun d'eux.

2) Comme Ψ est auto-conjugué, on peut permuter w et v dans (181) et l'on a :

$$g(w, v) = g(v, w) = 0$$

c'est-à-dire que les pôles de tous les plans w passant par un même point sont situés dans le plan polaire v de ce point.

3) Si un plan v tourne autour d'une droite, son pôle décrit une droite fixe.

En effet, le pôle du plan

$$v = \frac{v_1 + \lambda v_2}{1 + \lambda} \quad \text{est} \quad g(v, w) = 0 ;$$

$$\text{ou} \quad g(v_1, w) + \lambda g(v_2, w) = 0 ;$$

il décrit donc la droite qui joint les pôles de v_1 et v_2 . Ces deux droites sont dites *conjuguées*.

Proposons-nous de calculer les coordonnées axiales de ces deux conjuguées. Pour cela posons

$$p = v_1 - v_2 \quad \text{et} \quad q = \sqrt{v_1 v_2} ;$$

sa conjuguée sera donnée par

$$p' = \sqrt{\left(\frac{\Psi v_1 + B}{B v_1 + b} \right) \left(\frac{\Psi v_2 + B}{B v_2 + b} \right)} \quad (187)$$

$$\text{et} \quad q' = \frac{\Psi v_1 + B}{B v_1 + b} - \frac{\Psi v_2 + B}{B v_2 + b}$$

ou, effectuant et prenant des valeurs proportionnelles

$$\mathbf{m}' = \Phi_2 \mathbf{n} - \sqrt{\mathbf{A} \Phi \mathbf{m}}$$

$$\mathbf{n}' = \Phi(\sqrt{\mathbf{A} \mathbf{n}} + \mathbf{a} \mathbf{m}) + \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \mathbf{m}.$$

Diamètre. — Si la droite $(\mathbf{m}, \mathbf{n})$ est rejetée à l'infini, elle a pour coordonnées $(0, \mathbf{n})$, et sa conjuguée devient :

$$\mathbf{m}' = \Phi_2 \mathbf{n} \quad \mathbf{n}' = \Phi \sqrt{\mathbf{A} \mathbf{n}}; \quad (188)$$

c'est le *diamètre conjugué de la direction de plans* $\mathbf{n}$.

Le diamètre passe au centre

$$(-\Phi^{-1} \mathbf{A}), \quad \text{car}$$

$$-\sqrt{\Phi^{-1} \mathbf{A} \Phi_2 \mathbf{n}} + \Phi \sqrt{\mathbf{A} \mathbf{n}} = 0$$

si l'on remarque que (69)

$$\Phi^{-1} = \frac{\Phi_2}{\Phi_3}, \quad \text{et que (60)}$$

$$\sqrt{\Phi_2 \mathbf{A} \Phi_2 \mathbf{n}} = \Phi_3 \cdot \Phi \sqrt{\mathbf{A} \mathbf{n}}.$$

4) Quand le point $\mathbf{r}$ est rejeté à l'infini dans une direction déterminée, le plan polaire de $\mathbf{r}$ prend une position limite qu'on appelle le *plan diamétral* conjugué de la direction donnée.

En effet si $\mathbf{r} = t\mathbf{m}$ et si t devient infini, l'équation $f(t\mathbf{m}, \mathbf{R}) = 0$ ne pourra être satisfaite que si le coefficient de t est nul, c'est-à-dire si

$$\mathbf{R} \Phi \mathbf{m} + \mathbf{A} \mathbf{m} = 0. \quad (190)$$

C'est le plan diamétral conjugué de la direction $\mathbf{m}$; il a pour vecteur coordonné

$$\mathbf{u} = \frac{\Phi \mathbf{m}}{\mathbf{A} \mathbf{m}}.$$

ou, effectuant et prenant des valeurs proportionnelles

$$\mathbf{p}' = \Psi_2 \mathbf{q} - \sqrt{\mathbf{B} \Psi \mathbf{p}}$$

$$\mathbf{q}' = \Psi(\sqrt{\mathbf{B} \mathbf{q}} + \mathbf{b} \mathbf{p}) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} \mathbf{p}.$$

Diamètre. — Si la droite $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ est rejetée à l'infini, elle a pour coordonnées $(\mathbf{p}, 0)$ et sa conjuguée devient :

$$\mathbf{p}' = -\sqrt{\mathbf{B} \Psi \mathbf{p}} \quad \mathbf{q}' = \mathbf{b} \Psi \mathbf{p} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} \mathbf{p}; \quad (189)$$

c'est le *diamètre conjugué de la direction de plans* $\mathbf{p}$.

Le diamètre passe au centre

$$\left(\frac{\mathbf{B}}{\mathbf{b}}\right), \quad \text{car}$$

$$\sqrt{\mathbf{B} \Psi \mathbf{p}} + \frac{\mathbf{B} \mathbf{p}}{\mathbf{b}} \cdot \sqrt{\mathbf{B} \mathbf{B}} - \sqrt{\mathbf{B} \Psi \mathbf{p}} = 0.$$

si l'on remarque que (16)

$$\sqrt{\mathbf{B} \mathbf{B}} = 0.$$

4) Quand le plan $\mathbf{v}$ est rejeté à l'infini ($\mathbf{v} = 0$), son pôle devient $\frac{\mathbf{B}}{\mathbf{b}}$; c'est le *centre* de la quadrrique.

Le plan diamétral passe au centre

$$(-\Phi^{-1}\mathbf{A})$$

car $-\frac{\mathbf{A}\Phi^{-1}\Phi\mathbf{m}}{\mathbf{A}\mathbf{m}} + 1 = 0$.

Remarque. — Un plan diamétral conjugué d'une direction $\mathbf{m}$ est dit *singulier* lorsqu'il contient cette direction $\mathbf{m}$; dans ce cas

$$\mathbf{m}\Phi\mathbf{m} = 0. \quad (191)$$

Diamètres conjugués. — Considérons une direction arbitraire $\mathbf{a}$; la normale à son plan diamétral a pour direction $\Phi\mathbf{a}$. Soit $\mathbf{b}$ un vecteur contenu dans ce plan diamétral; ce vecteur satisfait à la relation $\mathbf{b}\Phi\mathbf{a} = 0$, et comme Φ est auto-conjuguée on a aussi $\mathbf{a}\Phi\mathbf{b} = 0$, c'est-à-dire que $\mathbf{a}$ est contenu dans le plan diamétral conjugué de la direction $\mathbf{b}$. Les deux plans diamétraux conjugués des directions $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ se coupent en général; soit $\mathbf{c}$ la direction de l'intersection: elle satisfait aux relations

$$\mathbf{c}\Phi\mathbf{a} = \mathbf{c}\Phi\mathbf{b} = 0.$$

Les trois directions $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ forment un système de trois diamètres conjugués; ils sont liés par les relations:

$$\mathbf{b}\Phi\mathbf{c} = \mathbf{c}\Phi\mathbf{b} = \mathbf{c}\Phi\mathbf{a} = \mathbf{a}\Phi\mathbf{c} = \mathbf{a}\Phi\mathbf{b} = \mathbf{b}\Phi\mathbf{a} = 0. \quad (192)$$

Plans principaux, directions principales ou axes. Une direction $\mathbf{m}$ est dite principale lorsqu'elle est perpendiculaire à son plan diamétral conjugué, c'est-à-dire si

$$\Phi\mathbf{m} = s\mathbf{m}$$

ou $(\Phi - s\mathbf{I})\mathbf{m} = 0.$

Pour que cette équation soit satisfaite (voir dyadiques), il faut que s soit racine de l'équation

$$s^3 - \Phi_{ss}^2 + \Phi_{ss} - \Phi_s = 0.$$

Comme Φ est auto-conjuguée, les racines s_1, s_2, s_3 de cette équation sont réelles.

1) Si elles sont *distinctes*, chacune d'elles donnera une *direction principale*; soient $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ des vecteurs unitaires choisis sur ces directions: on a:

$$(\Phi - s_1\mathbf{I})\mathbf{a} = 0 \quad (\Phi - s_2\mathbf{I})\mathbf{b} = 0 \quad (\Phi - s_3\mathbf{I})\mathbf{c} = 0.$$

Ces directions forment un système de diamètres conjugués trirectangleaux, les axes. Les plans diamétraux conjugués des directions principales sont appelés *plans principaux*; ils ont pour équations :

$$\mathbf{a}(s_1\mathbf{p} + \mathbf{A}) = 0 \quad \mathbf{b}(s_2\mathbf{p} + \mathbf{A}) = 0 \quad \mathbf{c}(s_3\mathbf{p} + \mathbf{A}) = 0 .$$

Ce sont trois plans de symétrie pour la quadrique.

2) Dans le cas d'une *racine double*, la dyadique Φ peut se ramener à la forme

$$\Phi = s_1\mathbf{a}.\mathbf{a} + s_2(\mathbf{b}.\mathbf{b} + \mathbf{c}.\mathbf{c}) ;$$

elle a un plan de directions principales, le plan $(\mathbf{b}, \mathbf{c})$; la quadrique est de révolution.

3) Si l'équation en s a une *racine triple*, toute direction est principale, et la quadrique est une sphère.

4) Reste le cas des *racines nulles*: il sera examiné dans le paragraphe suivant.

Réduction des quadriques. — On a vu que par le changement d'origine $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + \mathbf{p}'$ la quadrique

$$f(\mathbf{p}) = \mathbf{p}\Phi\mathbf{p} + 2\mathbf{A}\mathbf{p} + a = 0 \quad (168)$$

pouvait se ramener à la forme :

$$f(\mathbf{p}_0 + \mathbf{p}') = \mathbf{p}'\Phi\mathbf{p}' + 2\mathbf{p}'(\Phi\mathbf{p}_0 + \mathbf{A}) + \mathbf{p}_0(\Phi\mathbf{p}_0 + \mathbf{A}) + \mathbf{A}\mathbf{p}_0 + a = 0 . \quad (193)$$

I^{re} CLASSE. — La dyadique Φ est complète. — Nous pouvons choisir $\mathbf{p}_0$ de telle sorte que

$$\Phi\mathbf{p}_0 + \mathbf{A} = 0$$

en prenant

$$\mathbf{p}_0 = -\Phi^{-1}\mathbf{A} .$$

L'équation (193) devient : $\mathbf{p}'\Phi\mathbf{p}' + \mathbf{A}\mathbf{p}_0 + a = 0$.

Ramenons Φ à la forme canonique et prenons les directions principales comme vecteurs fondamentaux; on a :

$$\Phi = s_1\mathbf{i}.\mathbf{i} + s_2\mathbf{j}.\mathbf{j} + s_3\mathbf{k}.\mathbf{k} .$$

D'autre part on sait que

$$\mathbf{A}\mathbf{p}_0 + a = \frac{H}{\Phi_3} .$$

Par suite

$$\mathbf{p}'(s_1\mathbf{i}.\mathbf{i} + s_2\mathbf{j}.\mathbf{j} + s_3\mathbf{k}.\mathbf{k})\mathbf{p}' + \frac{H}{\Phi_3} = 0 \quad (I)$$

c'est-à-dire

$$s_1x_1'^2 + s_2x_2'^2 + s_3x_3'^2 + \frac{H}{\Phi_3} = 0 . \quad (I')$$

On a donc *un ellipsoïde* ou *un hyperboloïde à une ou à deux nappes*; enfin si $H = 0$, la quadrique est *un cône*. Exceptionnellement la quadrique est de révolution ($s_2 = s_3$) ou se réduit à *une sphère* ($s_1 = s_2 = s_3$).

II^{me} CLASSE ($s_3 = 0$). — Φ est *uniplanaire*. —

La dyadique Φ peut se ramener à $\Phi = s_1 \mathbf{i.i} + s_2 \mathbf{j.j}$.
Choisissons un vecteur $\mathbf{k}$ tel que $\mathbf{k} = \sqrt{\mathbf{i.j}}$; dans l'équation (193) l'expression

$$\Phi \rho_0 + \mathbf{A}$$

devient : $\Phi \rho_0 + \mathbf{A} = (s_1 x_{01} + A_1) \mathbf{i} + (s_2 x_{02} + A_2) \mathbf{j} + A_3 \mathbf{k}$.

Prenons $x_{01} = -\frac{A_1}{s_1}$ $x_{02} = -\frac{A_2}{s_2}$ $x_{03} = 0$

on aura $\Phi \rho_0 + \mathbf{A} = A_3 \mathbf{k}$.

L'équation (193) devient alors :

$$\rho' \Phi \rho' + 2A_3 \mathbf{k} \rho' + A_3 \mathbf{k} \rho_0 + \mathbf{A} \rho_0 + a = 0$$

mais $\mathbf{k} \rho_0 = x_{03} = 0$

d'où : $\rho' \Phi \rho' + 2A_3 \mathbf{k} \rho' + (\mathbf{A} \rho_0 + a) \mathbf{k}^2 = 0$

ou $\rho' \Phi \rho' + 2A_3 \mathbf{k} \left(\rho' + \frac{\mathbf{A} \rho_0 + a}{2A_3} \mathbf{k} \right) = 0$.

Posons $\rho' + \frac{\mathbf{A} \rho_0 + a}{2A_3} \mathbf{k} \equiv \rho''$

et remarquons que $\rho'' \Phi \rho'' = \rho' \Phi \rho'$;

on obtient : $\rho'' \Phi \rho'' + 2\mathbf{A} \mathbf{k} . \mathbf{k} \rho'' = 0$ (II)

c'est-à-dire : $s_1 x_1''^2 + s_2 x_2''^2 + 2A_3 x_3'' = 0$. (II')

C'est un *paraboloïde elliptique* ou *hyperbolique*.

III^{me} CLASSE. — Il peut arriver que $A_3 = \mathbf{A} \mathbf{k} = [\mathbf{A} \mathbf{i} \mathbf{j}] = 0$; le vecteur $\mathbf{A}$ est alors situé dans le plan de la dyadique. Dans ce cas $\Phi \rho_0 + \mathbf{A} = 0$, et la quadrique a pour équation

$$\rho' \Phi \rho' + \mathbf{A} \rho_0 + a = 0;$$

en posant $\mathbf{A} \rho_0 + a = d$,

elle devient : $\rho' \Phi \rho' + d = 0$ (III)

c'est-à-dire $s_1 x_1'^2 + s_2 x_2'^2 + d = 0$. (III')

C'est un *cylindre elliptique* ou *hyperbolique*.

IV^{me} CLASSE. — ($s_2 = s_3 = 0$) . — Φ est unilinéaire. —

On peut ramener la dyadique Φ à la forme $\Phi = s_1 \mathbf{i} \cdot \mathbf{i}$, et l'on a :

$$\Phi \rho_0 + a = (s_1 x_{01} + A_1) \mathbf{i} + A_2 \mathbf{j} + A_3 \mathbf{k} .$$

Choisissons la nouvelle origine ρ_0 de telle sorte que

$$x_{01} = -\frac{A_1}{s_1} \quad x_{02} = 0 \quad x_{03} = 0 ;$$

alors

$$\Phi \rho_0 + a = A_2 \mathbf{j} + A_3 \mathbf{k}$$

et l'équation (193) devient :

$$\rho' \Phi \rho' + 2\rho' (A_2 \mathbf{j} + A_3 \mathbf{k}) + \mathbf{A} \rho_0 + a = 0 .$$

Profitions de l'indétermination de $\mathbf{j}$ et $\mathbf{k}$ pour prendre

$$A_3 = \mathbf{A} \mathbf{k} = 0 .$$

Dans ces conditions $\mathbf{k} = \frac{\mathbf{j} \mathbf{A}}{|\mathbf{A}|}$ et $\mathbf{j} = \mathbf{V} \mathbf{k} \mathbf{i}$,

et l'on peut écrire $\rho' \Phi \rho' + 2A_2 \mathbf{j} \left(\rho' + \frac{\mathbf{A} \rho_0 + a}{2A_2} \mathbf{j} \right) = 0$.

Posant $\rho' + \frac{\mathbf{A} \rho_0 + a}{2A_2} \mathbf{j} \equiv \rho''$

et remarquant que $\rho'' \Phi \rho'' = \rho' \Phi \rho'$

on a : $\rho'' \Phi \rho'' + 2\mathbf{j} \mathbf{A} \cdot \mathbf{j} \rho'' = 0$ (IV)

c'est-à-dire : $s_1 x_1''^2 + 2A_2 x_2'' = 0$. (IV')

C'est un cylindre parabolique.

V^{me} CLASSE. — Supposons qu'en prenant $\mathbf{A} \mathbf{k} = 0$ on ait en même temps $\mathbf{A} \mathbf{j} = 0$; alors $\mathbf{V} \mathbf{A} \mathbf{i} = 0$, donc $\mathbf{A}$ est dirigé suivant $\mathbf{i}$. Dans ce

cas $\Phi \rho_0 + \mathbf{A} = 0$ et $\mathbf{A} \rho_0 = -\frac{A_1^2}{s_1}$;

la quadrique devient : $\rho' \Phi \rho' - \frac{A_1^2}{s_1} + a = 0$

ou $\rho' \Phi \rho' + d = 0$ (V)

c'est-à-dire $s_1 x_1'^2 + d = 0$. (V')

On a deux plans parallèles.

Equation tangentielle.

Le plan tangent se déduit immédiatement du plan polaire : si l'on prend $\mathbf{r}$ sur la quadrique, $f(\mathbf{r}) = 0$, et le plan tangent a pour vecteur

$$\frac{\Phi \mathbf{r} + \mathbf{A}}{\mathbf{A} \mathbf{r} + a}$$

Problème. — Trouver l'équation tangentielle de

$$f(\rho) = \rho \Phi \rho + 2\mathbf{A} \rho + a = 0. \quad (168)$$

Dans l'expression qui donne le vecteur du plan tangent, posons :

$$\begin{aligned} \Phi \rho + \mathbf{A} &= \lambda \mathbf{u} \\ \mathbf{A} \rho + a &= \lambda. \end{aligned}$$

On en tire

$$\rho = \lambda \Phi^{-1} \mathbf{u} - \Phi^{-1} \mathbf{A}$$

et $\lambda \mathbf{A} \Phi^{-1} \mathbf{u} - \mathbf{A} \Phi^{-1} \mathbf{A} + a = \lambda$; (194)
d'ailleurs

$$\mathbf{u} \rho + 1 = \frac{1}{\lambda} f(\rho) = 0$$

$$\text{ou } \lambda \mathbf{u} \Phi^{-1} \mathbf{u} - \mathbf{u} \Phi^{-1} \mathbf{A} + 1 = 0$$

$$\text{d'où : } \lambda = \frac{\mathbf{u} \Phi^{-1} \mathbf{A} - 1}{\mathbf{u} \Phi^{-1} \mathbf{u}}.$$

Portons cette valeur dans (194) et multiplions par $\mathbf{u} \Phi^{-1} \mathbf{u}$, on trouve :

$$\mathbf{u} \Phi^{-1} \mathbf{A} \mathbf{A} \Phi^{-1} \mathbf{u} - \mathbf{A} \Phi^{-1} \mathbf{A} \mathbf{u} \Phi^{-1} \mathbf{u} - 2\mathbf{u} \Phi^{-1} \mathbf{A} + \mathbf{a} \mathbf{u} \Phi^{-1} \mathbf{u} + 1 = 0$$

$$\text{ou}$$

$$\mathbf{u} (\mathbf{A} \Phi^{-1} \mathbf{A} \Phi^{-1} \mathbf{u} + \mathbf{a} \mathbf{u} \Phi^{-1} \mathbf{u} - 2\mathbf{u} \Phi^{-1} \mathbf{A} + 1) = 0$$

$$\text{ou}$$

$$\mathbf{u} (\mathbf{A} \Phi_2^{-1} \mathbf{A} + \mathbf{a} \Phi^{-1}) \mathbf{u} - 2\mathbf{u} \Phi^{-1} \mathbf{A} + 1 = 0, \quad (196)$$

Cas particulier. — Si la quadrique donnée a pour équation

$$\rho \Phi \rho = 1,$$

son équation tangentielle sera

$$\mathbf{u} \Phi^{-1} \mathbf{u} = 1.$$

Equation ponctuelle.

Le point de contact du plan tangent se déduit immédiatement du pôle d'un plan : si l'on prend $\mathbf{v}$ tangent à la quadrique $g(\mathbf{v}) = 0$, et le point de contact du plan tangent a pour vecteur

$$\frac{\Psi \mathbf{v} + \mathbf{B}}{\mathbf{B} \mathbf{v} + b}$$

Problème. — Trouver l'équation ponctuelle de

$$g(\mathbf{u}) = \mathbf{u} \Psi \mathbf{u} + 2\mathbf{B} \mathbf{u} + b = 0. \quad (169)$$

Dans l'expression du point de contact du plan tangent, posons :

$$\begin{aligned} \Psi \mathbf{u} + \mathbf{B} &= \lambda \rho \\ \mathbf{B} \mathbf{u} + b &= \lambda. \end{aligned}$$

On en tire

$$\mathbf{u} = \lambda \Psi^{-1} \rho - \Psi^{-1} \mathbf{B}$$

et $\lambda \mathbf{B} \Psi^{-1} \rho - \mathbf{B} \Psi^{-1} \mathbf{B} + b = \lambda$; (195)
d'ailleurs

$$\rho \mathbf{u} + 1 = \frac{1}{\lambda} g(\mathbf{u}) = 0$$

$$\text{ou } \lambda \rho \Psi^{-1} \rho - \rho \Psi^{-1} \mathbf{B} + 1 = 0$$

$$\text{d'où : } \lambda = \frac{\rho \Psi^{-1} \mathbf{B} - 1}{\rho \Psi^{-1} \rho}.$$

Portons cette valeur dans (195) et multiplions par $\rho \Psi^{-1} \rho$, on trouve :

$$\rho \Psi^{-1} \mathbf{B} \mathbf{B} \Psi^{-1} \rho - \mathbf{B} \Psi^{-1} \mathbf{B} \rho \Psi^{-1} \rho - 2\rho \Psi^{-1} \mathbf{B} + b \rho \Psi^{-1} \rho + 1 = 0$$

$$\text{ou}$$

$$\rho (\mathbf{B} \Psi^{-1} \mathbf{B} \Psi^{-1} \rho + b \rho \Psi^{-1} \rho - 2\rho \Psi^{-1} \mathbf{B} + 1) = 0$$

$$\text{ou}$$

$$\rho (\mathbf{B} \Psi_2^{-1} \mathbf{B} + b \Psi^{-1}) \rho - 2\rho \Psi^{-1} \mathbf{B} + 1 = 0 \quad (197)$$

Cas particulier. — Si la quadrique donnée a pour équation

$$\mathbf{u} \Psi \mathbf{u} = 1,$$

son équation ponctuelle sera

$$\rho \Psi^{-1} \rho = 1.$$

Transformées par polaires réciproques.

Soient $G(\mathbf{u}) = 0$ l'équation d'une surface quelconque S et $f(\mathbf{p}) = 0$ l'équation d'une quadrique Σ .

Soit $\mathbf{u}$ un plan tangent à S et $\mathbf{s}$ son pôle par rapport à Σ ; le plan polaire de $\mathbf{s}$ par rapport à Σ est

$$\mathbf{u}_s = \frac{\Phi \mathbf{s} + \mathbf{A}}{\mathbf{A} \mathbf{s} + a} ;$$

mais $\mathbf{u} = \mathbf{u}_s$, d'où

$$G\left(\frac{\Phi \mathbf{s} + \mathbf{A}}{\mathbf{A} \mathbf{s} + a}\right) = 0 . \quad (198)$$

C'est la transformée par polaires réciproques.

Soient $F(\mathbf{p}) = 0$ l'équation d'une surface quelconque S et $g(\mathbf{u}) = 0$ l'équation d'une quadrique Σ .

Soit $\mathbf{p}$ un point de S et $\mathbf{t}$ son plan polaire par rapport à Σ ; le pôle de $\mathbf{t}$ rapport à Σ est

$$\mathbf{p}_t = \frac{\Psi \mathbf{t} + \mathbf{B}}{\mathbf{B} \mathbf{t} + b} ;$$

mais $\mathbf{p} = \mathbf{p}_t$, d'où

$$F\left(\frac{\Psi \mathbf{t} + \mathbf{B}}{\mathbf{B} \mathbf{t} + b}\right) = 0 . \quad (199)$$

C'est la transformée par polaires réciproques.

Equation complexe d'une quadrique.

Nous avons vu que la conjuguée, par rapport à une quadrique, d'une droite $(\mathbf{m}, \mathbf{n})$ a pour coordonnées radiales :

$$\begin{aligned} \mathbf{m}' &= \Phi_2 \mathbf{n} - \sqrt{\mathbf{A} \Phi \mathbf{m}} , \\ \mathbf{n}' &= \Phi(\sqrt{\mathbf{A} \mathbf{n}} + a \mathbf{m}) + \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \mathbf{m} . \end{aligned}$$

Si les deux conjuguées se coupent, elles sont tangentes à la quadrique et l'on a :

$$\mathbf{m} \mathbf{n}' + \mathbf{n} \mathbf{m}' = 0$$

ou

$$\mathbf{m} \Phi(\sqrt{\mathbf{A} \mathbf{n}} + a \mathbf{m}) + (\mathbf{A} \mathbf{m})^2 + \mathbf{n} \Phi_2 \mathbf{n} - \mathbf{n} \sqrt{\mathbf{A} \Phi \mathbf{m}} = 0$$

ou

$$\mathbf{m}(a \Phi \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \mathbf{m} + \mathbf{n} \Phi_2 \mathbf{n} - 2 \mathbf{m}(\Phi \sqrt{\mathbf{A}}) \mathbf{n}) = 0$$

(200)

Nous avons vu que la conjuguée, par rapport à une quadrique, d'une droite $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ a pour coordonnées axiales :

$$\begin{aligned} \mathbf{p}' &= \Psi_2 \mathbf{q} - \sqrt{\mathbf{B} \Psi \mathbf{p}} , \\ \mathbf{q}' &= \Psi(\sqrt{\mathbf{B} \mathbf{q}} + b \mathbf{p}) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} \mathbf{p} . \end{aligned}$$

Si les deux conjuguées se coupent, elles sont tangentes à la quadrique et l'on a

$$\mathbf{p} \mathbf{q}' + \mathbf{q} \mathbf{p}' = 0$$

ou

$$\mathbf{p} \Psi(\sqrt{\mathbf{B} \mathbf{q}} + b \mathbf{p}) - \mathbf{B} \mathbf{p}^2 - \mathbf{q} \Psi_2 \mathbf{q} - \mathbf{q} \sqrt{\mathbf{B} \Psi \mathbf{p}} = 0$$

ou

$$\mathbf{p}(b \Psi + \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} \mathbf{p} + \mathbf{q} \Psi_2 \mathbf{q} + 2 \mathbf{p}(\Psi \sqrt{\mathbf{B}}) \mathbf{q}) = 0$$

(201)

C'est la condition pour qu'une droite $(\mathbf{m}, \mathbf{n})$ soit tangente à une quadrique; on dit que c'est l'équation de la quadrique en coordonnées radiales, ou simplement l'équation complexe de la quadrique.

Cas particuliers. — 1) Si la quadrique donnée a pour équation

$$\rho \Phi \rho = 1$$

son équation complexe sera

$$\mathbf{m} \Phi \mathbf{m} - \mathbf{n} \Phi_2 \mathbf{n} = 0.$$

2) Comme cette quadrique peut encore se mettre sous la forme

$$\mathbf{u} \Phi^{-1} \mathbf{u} = 1$$

on a aussi

$$\mathbf{p} \Phi^{-1} \mathbf{p} - \mathbf{q} \Phi_2^{-1} \mathbf{q} = 0.$$

C'est la condition pour qu'une droite $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ soit tangente à une quadrique; on dit que c'est l'équation de la quadrique en coordonnées axiales, ou simplement l'équation complexe de la quadrique.

Cas particuliers. — 1) Si la quadrique donnée a pour équation

$$\mathbf{u} \Psi \mathbf{u} = 1$$

son équation complexe sera

$$\mathbf{p} \Psi \mathbf{p} - \mathbf{q} \Psi_2 \mathbf{q} = 0.$$

2) Comme cette quadrique peut encore se mettre sous la forme

$$\rho \Psi^{-1} \rho = 1$$

on a aussi

$$\mathbf{m} \Psi^{-1} \mathbf{m} - \mathbf{n} \Psi_2^{-1} \mathbf{n} = 0.$$

Quadriques réglées.

Problème. — Condition pour qu'une droite $(\mathbf{m}, \mathbf{n})$ soit sur une quadrique $f(\rho) = 0$.

Soit ρ_0 un point d'une quadrique réglée, et $(\mathbf{m}, \mathbf{n})$ une génératrice de cette quadrique, passant par ρ_0 ; si l'on désigne par ρ un point quelconque de cette génératrice, on aura :

$$\rho = \rho_0 + x\mathbf{m}$$

où x est un paramètre variable.

On a : $f(\rho_0 + x\mathbf{m}) = 0$

ou

$$(\rho_0 + x\mathbf{m}) \Phi (\rho_0 + x\mathbf{m}) - 2\mathbf{A}(\rho_0 + x\mathbf{m}) + a = 0$$

mais $f(\rho_0) = 0$

d'où : $x\mathbf{m} \Phi \mathbf{m} + 2\mathbf{m}(\Phi \rho_0 + \mathbf{A}) = 0.$

Problème. — Condition pour qu'une droite $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ soit sur une quadrique $g(\mathbf{u}) = 0$.

Soit $\mathbf{u}_0$ un plan tangent à une quadrique réglée, et $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ une génératrice de cette quadrique, située dans $\mathbf{u}_0$; si l'on désigne par $\mathbf{u}$ un plan tangent quelconque passant par cette génératrice, on aura :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + x\mathbf{p}$$

où x est un paramètre variable.

On a : $g(\mathbf{u}_0 + x\mathbf{p}) = 0$

ou

$$(\mathbf{u}_0 + x\mathbf{p}) \Psi (\mathbf{u}_0 + x\mathbf{p}) + 2\mathbf{B}(\mathbf{u}_0 + x\mathbf{p}) + b = 0$$

mais $g(\mathbf{u}_0) = 0$

d'où : $x\mathbf{p} \Psi \mathbf{p} + 2\mathbf{p}(\Psi \mathbf{u}_0 + \mathbf{B}) = 0.$

Mais cette relation doit être vérifiée quel que soit x , ce qui entraîne :

$$m\Phi m = 0$$

$$m(\Phi\rho_0 + A) = 0$$

d'ailleurs $mn = 0$.

De ces trois égalités il résulte que :

$$(\Phi\rho_0 + A)\nabla n\Phi m = 0$$

$$\text{ou } n\nabla\Phi m\Phi\rho_0 + \Phi m\nabla An = 0$$

$$n\Phi_2\nabla m\rho_0 + m\Phi\nabla An = 0$$

$$n\Phi_2 n + m\Phi\nabla An = 0. \quad (202)$$

C'est la condition cherchée.

Mais cette relation doit être vérifiée quel que soit x , ce qui entraîne :

$$p\Psi p = 0$$

$$p(\Psi u_0 + B) = 0$$

d'ailleurs $pq = 0$.

De ces trois égalités il résulte que :

$$(\Psi u_0 + B)\nabla q\Psi p = 0$$

$$\text{ou } q\nabla\Psi p\Psi u_0 + \Psi p\nabla Bq = 0$$

$$q\Psi_2\nabla pu_0 + p\Psi\nabla Bq = 0$$

$$q\Psi_2 q + p\Psi\nabla Bq = 0. \quad (203)$$

C'est la condition cherchée.

*Problème *.* — Condition pour qu'une droite $D(m, n)$ coupe trois droites données $D_i(m_i, n_i)$ ($i = 1, 2, 3$). On doit avoir aussi

$$mn_i + nm_i = 0. \quad (204)$$

Si p est un point quelconque de (m, n) , il satisfait à la relation

$$\nabla pm + n = 0$$

et la condition (204) devient :

$$m(n_i + \nabla pm_i) = 0;$$

cela entraîne :

$$(n_1 + \nabla pm_1)\nabla(n_2 + \nabla pm_2)(n_3 + \nabla pm_3) = 0$$

ou

$$[n_1, n_2, n_3] + \sum \nabla pm_i \nabla n_i + \sum n_i \nabla \nabla pm_i \nabla pm_i = 0$$

$$[n_1, n_2, n_3] + p \sum \nabla m_i \nabla n_i + \sum (n_i p \cdot \nabla pm_i) = 0.$$

(205)

Si u est un plan quelconque passant par (m, n) , il satisfait à la relation

$$\nabla un + m = 0$$

et la condition (204) devient :

$$n(m_i + \nabla un_i) = 0;$$

cela entraîne :

$$(m_1 + \nabla un_1)\nabla(m_2 + \nabla un_2)(m_3 + \nabla un_3) = 0$$

ou

$$[m_1, m_2, m_3] + \sum \nabla un_i \nabla m_i + \sum m_i \nabla \nabla un_i \nabla un_i = 0$$

$$[m_1, m_2, m_3] + u \sum \nabla n_i \nabla m_i + \sum (m_i u \cdot \nabla un_i) = 0.$$

(206)

* Pour ne pas allonger inutilement la discussion, on n'a pas introduit les coordonnées (p, q) .

Posons :

$$\begin{aligned} 2\mathbf{A} &= \sum \mathbf{m}_1 \mathbf{m}_2 \mathbf{m}_3 \\ &= \mathbf{m}_1 \mathbf{m}_2 \mathbf{m}_3 + \mathbf{m}_2 \mathbf{m}_3 \mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_3 \mathbf{m}_1 \mathbf{m}_2 \quad \text{et} \\ \Phi &= \sum (\mathbf{n}_1 \mathbf{m}_2 \mathbf{m}_3) \\ &= \mathbf{n}_1 \mathbf{m}_2 \mathbf{m}_3 + \mathbf{n}_2 \mathbf{m}_3 \mathbf{m}_1 + \mathbf{n}_3 \mathbf{m}_1 \mathbf{m}_2. \end{aligned}$$

Il vient :

$$\rho \Phi \rho + 2\mathbf{A} \rho + [\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2 \mathbf{n}_3] = 0. \quad (207)$$

Posons :

$$\begin{aligned} 2\mathbf{B} &= \sum \mathbf{n}_1 \mathbf{m}_2 \mathbf{m}_3 \\ &= \mathbf{n}_1 \mathbf{m}_2 \mathbf{m}_3 + \mathbf{n}_2 \mathbf{m}_3 \mathbf{m}_1 + \mathbf{n}_3 \mathbf{m}_1 \mathbf{m}_2 \\ \Psi &= \sum (\mathbf{m}_1 \mathbf{n}_2 \mathbf{n}_3) \\ &= \mathbf{m}_1 \mathbf{n}_2 \mathbf{n}_3 + \mathbf{m}_2 \mathbf{n}_3 \mathbf{n}_1 + \mathbf{m}_3 \mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2. \end{aligned}$$

Il vient :

$$\mathbf{u} \Psi \mathbf{u} + 2\mathbf{B} \mathbf{u} + [\mathbf{m}_1 \mathbf{m}_2 \mathbf{m}_3] = 0. \quad (208)$$

Les droites $D(\mathbf{m}, \mathbf{n})$ sont donc situées sur une quadrique qui est évidemment réglée; ces droites constituent les génératrices d'un système de la quadrique; les génératrices du deuxième système sont les droites $D'(\mathbf{m}', \mathbf{n}')$ telles que

$$\mathbf{m}' = \lambda_1 \mathbf{m}_1 + \lambda_2 \mathbf{m}_2 + \lambda_3 \mathbf{m}_3 \quad \mathbf{n}' = \lambda_1 \mathbf{n}_1 + \lambda_2 \mathbf{n}_2 + \lambda_3 \mathbf{n}_3.$$

Pour que ces deux vecteurs soient effectivement les coordonnées d'une droite il faut que

$$\mathbf{m}' \mathbf{n}' = 0$$

$$\text{ou} \quad \lambda_2 \lambda_3 m_{23} + \lambda_3 \lambda_1 m_{31} + \lambda_1 \lambda_2 m_{12} = 0. \quad (209)$$

Si cette condition est remplie, et elle l'est pour une infinité (∞^1) de valeurs, toute droite $D(\mathbf{m}, \mathbf{n})$ du premier système qui coupe D_i coupe aussi D' car alors

$$m \mathbf{n}' + \mathbf{n} m' \equiv 0.$$

Discussion. — a) Les droites données ne se coupent pas : $m_{ij} \neq 0$. Nous subdiviserons ce cas en deux autres.

1) Si $[\mathbf{m}_1 \mathbf{m}_2 \mathbf{m}_3] \neq 0$, la dyadique Φ est complète; la quadrique est un hyperboloïde à une nappe; son centre a pour vecteur

$$\frac{1}{2} \frac{\Phi_v}{[\mathbf{m}_1 \mathbf{m}_2 \mathbf{m}_3]}.$$

Dans le cas particulier où $[\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2 \mathbf{n}_3] = 0$, l'hyperboloïde passe par l'origine, puisque son équation est alors vérifiée pour $\rho = 0$; mais cette équation est aussi vérifiée pour

$$\Phi \rho + 2\mathbf{A} = 0 \quad \text{ou} \quad \rho = -2\Phi^{-1}\mathbf{A} = -\frac{\Phi_v}{[\mathbf{m}_1 \mathbf{m}_2 \mathbf{m}_3]};$$

c'est le point symétrique de l'origine par rapport au centre.

2) Si $[\mathbf{m}_1 \mathbf{m}_2 \mathbf{m}_3] = 0$ les trois droites données sont parallèles à un même plan; la dyadique est uniplanaire et la quadrique est un para-

boloïde hyperbolique : son centre est rejeté à l'infini dans la direction Φ_v . Le paraboloïde est tangent au plan de l'infini car son équation est vérifiée pour $\mathbf{u} = 0$; il est aussi tangent au plan $\mathbf{u} = -2\Psi^{-1}\mathbf{B}$.

b) *Les droites données se coupent.* — Supposons, par exemple, $m_{23} = 0$; les droites D_2 et D_3 se coupent en un point $\rho_{23} = \frac{\sqrt{n_2 n_3}}{m_2 m_3}$ et déterminant un plan $\mathbf{u}_{23} = \frac{\sqrt{m_2 m_3}}{n_2 m_3}$; dans ce cas :

1) Si D_1 coupe $\mathbf{u}_{23}$ sans passer par ρ_{23} , la condition (209) se réduit à

$$\lambda_3 \lambda_1 m_{31} + \lambda_1 \lambda_2 m_{12} = 0$$

et l'on a deux faisceaux plans fournis par

$$\lambda_1 = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\lambda_2}{\lambda_3} = -\frac{m_{31}}{m_{12}}.$$

2) Si D_1 coupe D_3 sans couper D_2 , on a $m_{31} = 0$ et la condition (209) devient

$$\lambda_1 \lambda_2 m_{12} = 0$$

elle est vérifiée pour $\lambda_1 = 0$ et pour $\lambda_2 = 0$; on a encore deux faisceaux plans.

3) Si D_1 est située dans $\mathbf{u}_{23}$ sans passer par ρ_{23} , la condition (209) est vérifiée identiquement ; les droites $(\mathbf{m}, \mathbf{n})$ forment un champ et satisfont toutes à la relation

$$\sqrt{\mathbf{u}_{ij} \mathbf{n} + \mathbf{m}} = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3) : \quad i \neq j.$$

4) Si D_1 passe par ρ_{23} sans que $[\mathbf{m}_1 \mathbf{m}_2 \mathbf{m}_3] = 0$, les droites $(\mathbf{m}, \mathbf{n})$ forment une gerbe et satisfont à

$$\sqrt{\rho_{ij} \mathbf{m} + \mathbf{n}} = 0.$$

5) Si D_1 passe en ρ_{23} et est située dans $\mathbf{u}_{23}$, les trois droites données font partie d'un même faisceau ; les droites $(\mathbf{m}, \mathbf{n})$ sont toutes celles du champ $\mathbf{u}_{ij}$ et de la gerbe qui a ρ_{ij} pour sommet.

Génération projective des quadriques.

1) Faisceaux et ponctuelles homographiques.

Soient $D_1(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ et $D_2(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ les axes de deux faisceaux de plans

$$\frac{\mathbf{u}_1 - \lambda \mathbf{u}_2}{1 - \lambda} \rho + 1 = 0 \quad (210)$$

$$\frac{\mathbf{v}_1 - \mu \mathbf{v}_2}{1 - \mu} \rho + 1 = 0 \quad (211)$$

Ces deux faisceaux sont projectifs si à un plan du premier correspond un seul plan du second faisceau. Pour que ce soit le cas, il faut que les λ et μ soient liés par une relation de la forme

$$a\lambda\mu + b\lambda + c\mu + d = 0 \quad (214)$$

appelée relation de projectivité.

Synthèse. — Entre les équations (210), (211) et (214) éliminons λ et μ ; on a :

$$\lambda = \frac{\mathbf{u}_1 \rho + 1}{\mathbf{u}_2 \rho + 1} \quad \mu = \frac{\mathbf{v}_1 \rho + 1}{\mathbf{v}_2 \rho + 1}$$

Portons ces valeurs dans l'équation de projectivité, il vient :

$$f(\rho) = \rho(a\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1 + b\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2 + c\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 + d\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2) \rho + [a(\mathbf{u}_1 + \mathbf{v}_1) + b(\mathbf{u}_1 + \mathbf{v}_2) + c(\mathbf{u}_2 + \mathbf{v}_1) + d(\mathbf{u}_2 + \mathbf{v}_2)] \rho + (a + b + c + d) = 0$$

équation de la forme

$$f(\rho) = \rho \Phi \rho + 2\mathbf{A}\rho + a = 0$$

Un point quelconque ρ de l'intersection de deux plans correspondants des faisceaux (λ) et (μ) se

Soient $D_1(\rho_1, \rho_2)$ et $D_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ les supports de deux ponctuelles

$$\frac{\rho_1 - \lambda \rho_2}{1 - \lambda} \mathbf{u} + 1 = 0 \quad (212)$$

$$\frac{\mathbf{r}_1 - \mu \mathbf{r}_2}{1 - \mu} \mathbf{u} + 1 = 0 \quad (213)$$

Ces deux ponctuelles sont projectives si à un point de la première correspond un seul point de la deuxième ponctuelle. Pour que ce soit le cas, il faut que les λ et μ soient liés par une relation de la forme

$$a\lambda\mu + b\lambda + c\mu + d = 0 \quad (214)$$

appelée relation de projectivité.

Synthèse. — Entre les équations (212), (213) et (214) éliminons λ et μ ; on a :

$$\lambda = \frac{\mathbf{u}\rho_1 + 1}{\mathbf{u}\rho_2 + 1} \quad \mu = \frac{\mathbf{u}\mathbf{r}_1 + 1}{\mathbf{u}\mathbf{r}_2 + 1}$$

Portons ces valeurs dans l'équation de projectivité, il vient :

$$g(\mathbf{u}) = \mathbf{u}(a\rho_1, \mathbf{r}_1 + b\rho_1, \mathbf{r}_2 + c\rho_2, \mathbf{r}_1 + d\rho_2, \mathbf{r}_2) \mathbf{u} + [a(\rho_1 + \mathbf{r}_1) + b(\rho_1 + \mathbf{r}_2) + c(\rho_2 + \mathbf{r}_1) + d(\rho_2 + \mathbf{r}_2)] \mathbf{u} + (a + b + c + d) = 0$$

équation de la forme

$$g(\mathbf{u}) = \mathbf{u}\Psi\mathbf{u} + 2\mathbf{B}\mathbf{u} + b = 0$$

Un plan quelconque $\mathbf{u}$ passant par la droite qui joint deux points correspondants des ponctuelles (λ)

trouve donc sur une quadrique; il est évident que cette quadrique est réglée.

Cherchons à mettre en évidence les deux systèmes de génératrices de la quadrique engendrée. Il est aisé de voir que l'équation $f(\rho) = 0$ peut s'obtenir en éliminant λ entre les deux équations :

$$G_1 \begin{cases} u_1\rho + 1 = \lambda(u_2\rho + 1) \\ a(v_1\rho + 1) + b(v_2\rho + 1) \\ - \frac{1}{\lambda} [c(v_1\rho + 1) + d(v_2\rho + 1)] \end{cases}$$

ou en éliminant v entre

$$G_2 \begin{cases} u_1\rho + 1 = v[c(v_1\rho + 1) + d(v_2\rho + 1)] \\ a(v_1\rho + 1) + b(v_2\rho + 1) = -\frac{1}{v}(u_2\rho + 1) \end{cases}$$

ou bien

$$G_1 \begin{cases} \frac{u_1 - \lambda u_2}{1 - \lambda} \rho + 1 = 0 \\ \frac{v_1 - \mu v_2}{1 - \mu} \rho + 1 = 0 \end{cases}$$

λ et μ étant liés par la relation de projectivité ;

$$G_2 \begin{cases} \frac{u_1 - v c v_1 - v d v_2}{1 - v c - v d} \rho + 1 = 0 \\ \frac{u_2 + v a v_1 + v b v_2}{1 + v a + v b} \rho + 1 = 0 \end{cases}$$

Corollaire I. —

Les coordonnées radiales des deux systèmes de génératrices s'en déduisent aisément :

$$G_1 \begin{cases} m_1 = \frac{V(u_1 - \lambda u_2)(v_1 - \mu v_2)}{(1 - \lambda)(1 - \mu)} \\ n_1 = \frac{u_1 - \lambda u_2}{1 - \lambda} - \frac{v_1 - \mu v_2}{1 - \mu} \end{cases}$$

et (μ) est donc tangent à une quadrique; il est évident que cette quadrique est réglée.

Cherchons à mettre en évidence les deux systèmes de génératrices de la quadrique engendrée. Il est aisé de voir que l'équation $g(u) = 0$ peut s'obtenir en éliminant λ entre les deux équations :

$$G_1 \begin{cases} \rho_1 u + 1 = \lambda(\rho_2 u + 1) \\ a(r_1 u + 1) + b(r_2 u + 1) \\ = -\frac{1}{\lambda} [c(r_1 u + 1) + d(r_2 u + 1)] \end{cases}$$

ou en éliminant v entre

$$G_2 \begin{cases} \rho_1 u + 1 = v[c(r_1 u + 1) + d(r_2 u + 1)] \\ a(r_1 u + 1) + b(r_2 u + 1) = -\frac{1}{v}(\rho_2 u + 1) \end{cases}$$

ou bien

$$G_1 \begin{cases} \frac{\rho_1 - \lambda \rho_2}{1 - \lambda} u + 1 = 0 \\ \frac{r_1 - \mu r_2}{1 - \mu} u + 1 = 0 \end{cases}$$

λ et μ étant liés par la relation de projectivité ;

$$G_2 \begin{cases} \frac{\rho_1 - v c r_1 - v d r_2}{1 - v c - v d} u + 1 = 0 \\ \frac{\rho_2 + v a r_1 + v b r_2}{1 + v a + v b} u + 1 = 0 \end{cases}$$

Corollaire I. —

Les coordonnées axiales des deux systèmes de génératrices s'en déduisent aisément :

$$G_1 \begin{cases} p_1 = \frac{V(\rho_1 - \lambda \rho_2)(r_1 - \mu r_2)}{(1 - \lambda)(1 - \mu)} \\ q_1 = \frac{\rho_1 - \lambda \rho_2}{1 - \lambda} - \frac{r_1 - \mu r_2}{1 - \mu} \end{cases}$$

$$G_2 \left\{ \begin{aligned} \mathbf{m}_2 &= \frac{\mathbf{u}_1 - v\mathbf{c}\mathbf{v}_1 - v\mathbf{d}\mathbf{v}_2}{(1 - v\mathbf{c} - v\mathbf{d})} \cdot \frac{\mathbf{u}_2 + v\mathbf{a}\mathbf{v}_1 + v\mathbf{b}\mathbf{v}_2}{(1 + v\mathbf{a} + v\mathbf{b})} \\ \mathbf{n}_2 &= \frac{\mathbf{u}_1 - v\mathbf{c}\mathbf{v}_1 - v\mathbf{d}\mathbf{v}_2}{1 - v\mathbf{c} - v\mathbf{d}} - \frac{\mathbf{u}_2 + v\mathbf{a}\mathbf{v}_1 + v\mathbf{b}\mathbf{v}_2}{1 + v\mathbf{a} + v\mathbf{b}} \end{aligned} \right.$$

Coroll. II. — Les droites $D_1(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ et $D_2(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ font partie du deuxième système ; on le vérifie aisément en faisant $v = 0$ et $v = \infty$.

$$G_2 \left\{ \begin{aligned} \mathbf{p}_2 &= \frac{\mathbf{p}_1 - v\mathbf{c}\mathbf{r}_1 - v\mathbf{d}\mathbf{r}_2}{(1 - v\mathbf{c} - v\mathbf{d})} \cdot \frac{(\mathbf{p}_2 + v\mathbf{a}\mathbf{r}_1 + v\mathbf{b}\mathbf{r}_2)}{(1 + v\mathbf{a} + v\mathbf{b})} \\ \mathbf{q}_2 &= \frac{\mathbf{p}_1 - v\mathbf{c}\mathbf{r}_1 - v\mathbf{d}\mathbf{r}_2}{1 - v\mathbf{c} - v\mathbf{d}} - \frac{\mathbf{p}_2 + v\mathbf{a}\mathbf{r}_1 + v\mathbf{b}\mathbf{r}_2}{1 + v\mathbf{a} + v\mathbf{b}} \end{aligned} \right.$$

Coroll. II. — des droites $D_1(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$ et $D_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ font partie du deuxième système ; on le vérifie aisément en faisant $v = 0$ et $v = \infty$.

2) Gerbes et systèmes plans réciproques.

Définition. — « Deux gerbes S et S_1 sont *réciproques* quant à tout rayon g de S correspond un plan γ_1 de S_1 et à tout plan ϵ de S passant par g un rayon e_1 de S_1 situé dans γ_1 . » *

Théorème. — Le lieu des points d'intersection des éléments correspondants de deux gerbes réciproques non concentriques est une quadrique.

Soient $\mathbf{p}_1$ le sommet de la gerbe de droites $(\mathbf{m}, \mathbf{n})$, $\mathbf{p}_2$ le sommet de la gerbe de plans $\mathbf{u}$, et

$$\mathbf{u} = \Phi \mathbf{m}$$

la relation de réciprocité, Φ étant une dyadique quelconque. Désignons par $\mathbf{R}$ l'intersection de deux éléments correspondants. On a :

$$(\mathbf{R} - \mathbf{p}_2)\mathbf{u} = 0$$

$$\text{ou} \quad (\mathbf{R} - \mathbf{p}_2)\Phi \mathbf{m} = 0 ;$$

$$\text{mais} \quad \mathbf{V}(\mathbf{R} - \mathbf{p}_1)\mathbf{m} = 0 ,$$

$$\text{d'où} \quad (\mathbf{R} - \mathbf{p}_2)\Phi(\mathbf{R} - \mathbf{p}_1) = 0 . \quad (215)$$

Définition. — « Deux systèmes plans Σ et Σ_1 sont *réciproques* quant à chaque point P de Σ correspond une droite p_1 de Σ_1 et à chaque droite g de Σ passant par P un point G_1 de Σ_1 situé sur p_1 . » *

Théorème. — L'enveloppe des plans menés par les éléments correspondants de deux systèmes plans réciproques non coplanaires est une quadrique.

Soient $\mathbf{u}_1$ le champ de droites $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, $\mathbf{u}_2$ le système plan de points $\mathbf{p}$ (∞^2 de points), et

$$\mathbf{p} = \Psi \mathbf{p}$$

la relation de réciprocité, Ψ étant une quadrique quelconque. Désignons $\mathbf{U}$ le plan mené par deux éléments correspondants. On a :

$$(\mathbf{U} - \mathbf{u}_2)\mathbf{p} = 0$$

$$\text{ou} \quad (\mathbf{U} - \mathbf{u}_2)\Psi \mathbf{p} = 0 ;$$

$$\text{mais} \quad \mathbf{V}(\mathbf{U} - \mathbf{u}_1)\mathbf{p} = 0 .$$

$$\text{d'où} \quad (\mathbf{U} - \mathbf{u}_2)\Psi(\mathbf{U} - \mathbf{u}_1) = 0 . \quad (216)$$

* Ces deux définitions sont empruntées à la *Géométrie de position*, de REYE (traduction O. Chemin), II, p. 3.

Le lieu cherché est donc bien une quadrique, dont la nature dépend de la dyadique Φ et des points donnés ρ_1 et ρ_2 . Cette quadrique passe évidemment par ρ_1 et ρ_2 .

Les deux gerbes données étant réciproques, soient $\vee \mathbf{m}_1 \mathbf{m}_2$ le plan déterminé par deux droites $(\mathbf{m}_1, \mathbf{n}_1)$ et $(\mathbf{m}_2, \mathbf{n}_2)$ passant en ρ_1 , $\vee \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2$ la direction de l'intersection de deux plans $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$ passant par ρ_2 , $\mathbf{R}'$ le point commun à deux éléments réciproques définis par la relation

$$\vee \mathbf{m}_1 \mathbf{m}_2 = \Phi' \vee \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2.$$

On a encore :

$$(\mathbf{R}' - \rho_1) \vee \mathbf{m}_1 \mathbf{m}_2 = 0$$

$$\text{ou } (\mathbf{R}' - \rho_1) \Phi' \vee \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2 = 0;$$

$$\text{mais } \vee (\mathbf{R}' - \rho_2) \vee \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2 = 0$$

$$\text{d'où } (\mathbf{R}' - \rho_1) \Phi' (\mathbf{R}' - \rho_2) = 0.$$

Pour que cette quadrique soit la même que la précédente, il faut et il suffit que $\Phi' = \Phi_c$.

Nous supposons cette condition remplie.

L'équation (215) de la quadrique peut encore s'écrire :

$$\mathbf{R} \Phi \mathbf{R} - (\Phi \rho_1 + \Phi \rho_2) \mathbf{R} + \rho_1 \Phi \rho_2 = 0.$$

Son centre a pour vecteur

$$\rho_0 = \frac{1}{2} \Phi^{-1} (\Phi \rho_1 + \Phi \rho_2) = \frac{1}{2} (\rho_1 + \rho_2).$$

C'est donc le milieu de la droite qui joint les sommets des deux gerbes.

L'enveloppe cherchée est donc bien une quadrique dont la nature dépend de la dyadique Ψ' et des plans donnés $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$. Cette quadrique est évidemment tangente à $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$.

Les deux systèmes plans donnés étant réciproques, soient $\vee \rho_1 \rho_2$ le point d'intersection de deux droites $(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1)$ et $(\mathbf{p}_2, \mathbf{q}_2)$ situés dans $\mathbf{u}_1$, $\vee \rho_1 \rho_2$ la deuxième coordonnée radiale de la droite qui joint deux points ρ_1 et ρ_2 situés dans $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{U}'$ le plan commun à deux éléments réciproques définis par la relation

$$\vee \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 = \Psi' \vee \rho_1 \rho_2$$

On a encore :

$$(\mathbf{U}' - \mathbf{u}_1) \vee \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 = 0$$

$$\text{ou } (\mathbf{U}' - \mathbf{u}_1) \Psi' \vee \rho_1 \rho_2 = 0;$$

$$\text{mais } \vee (\mathbf{U}' - \mathbf{u}_2) \vee \rho_1 \rho_2 = 0$$

$$\text{d'où } (\mathbf{U}' - \mathbf{u}_1) \Psi' (\mathbf{U}' - \mathbf{u}_2) = 0.$$

Pour que cette quadrique soit la même que la précédente, il faut et il suffit que $\Psi' = \Psi'_c$.

Nous supposons cette condition remplie.

L'équation (216) de la quadrique peut encore s'écrire :

$$\mathbf{U} \Psi \mathbf{U} - (\Psi \mathbf{u}_1 + \Psi \mathbf{u}_2) \mathbf{U} + \mathbf{u}_1 \Psi \mathbf{u}_2 = 0.$$

Son centre a pour vecteur

$$-\frac{\Psi'(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2)}{\mathbf{u}_1 \Psi \mathbf{u}_2}.$$

CHAPITRE III

Les complexes linéaires

I. LE COMPLEXE LINÉAIRE

Supposons que les coordonnées $(\mathbf{m}, \mathbf{n})$ satisfassent à l'équation	Supposons que les coordonnées $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ satisfassent à l'équation
--	--

$C = \mathbf{A}\mathbf{m} + \mathbf{B}\mathbf{n} = 0 \quad (217)$	$K = \mathbf{B}\mathbf{p} + \mathbf{A}\mathbf{q} = 0 \quad (218)$
---	---

dans laquelle $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont deux vecteurs constants en général différents l'un de l'autre. Tout couple de vecteurs satisfaisant à cette équation détermine une droite : l'ensemble de ces droites forme un complexe linéaire.

Si le produit $\mathbf{AB} = 0$, les vecteurs $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont les coordonnées d'une droite fixe qui coupe toute droite appartenant au complexe ; le complexe est dit *spécial* et la droite fixe est son axe central. Mais si $\mathbf{AB} \neq 0$, le complexe est quelconque : occupons-nous d'abord de ce dernier.

Plan polaire. — L'équation (217) peut s'écrire :	Pôle. — L'équation (218) peut s'écrire :
---	---

$\mathbf{A}(\rho_1 - \rho_2) + \mathbf{B}\sqrt{\rho_1 \rho_2} = 0$	$\mathbf{B}(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) + \mathbf{A}\sqrt{\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2} = 0$
ou $\rho_1(\mathbf{A} + \sqrt{\rho_2 \mathbf{B}}) - \mathbf{A}\rho_2 = 0$	ou $\mathbf{u}_1(\mathbf{B} + \sqrt{\mathbf{u}_2 \mathbf{A}}) - \mathbf{B}\mathbf{u}_2 = 0$

ce qui montre que, si ρ_2 reste fixe, le point ρ_1 de $(\mathbf{m}, \mathbf{n})$ décrit un plan dont le vecteur est

$$\mathbf{u}_2 = \frac{\sqrt{\rho_2 \mathbf{B}} + \mathbf{A}}{-\mathbf{A}\rho_2} ; \quad (219)$$

c'est le *plan polaire* de ρ_2 .

ce qui montre que, si $\mathbf{u}_2$ reste fixe, le plan $\mathbf{u}_1$ passant par $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ passe par le point

$$\rho_2 = \frac{\sqrt{\mathbf{u}_2 \mathbf{A}} + \mathbf{B}}{-\mathbf{B}\mathbf{u}_2} ; \quad (220)$$

c'est le *pôle* de $\mathbf{u}_2$.

Conjuguées. — Lorsqu'un point décrit la ponctuelle

$$\frac{\lambda' \rho' + \lambda'' \rho''}{\lambda' + \lambda''}$$

son plan polaire

$$\frac{\mu \mathbf{u}' + \mathbf{u}''}{\mu \lambda' + \lambda''}$$

tourne autour de l'intersection des plans $\mathbf{u}'$ et $\mathbf{u}''$. Les deux droites déterminées par (ρ', ρ'') et $(\mathbf{u}', \mathbf{u}'')$ sont dites *conjuguées*.

Corollaire. — Le point

$$\rho_i = \frac{\rho' + \lambda_i \rho''}{1 + \lambda_i} \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

a pour plan polaire

$$\mathbf{u}_i = \frac{\mu \mathbf{u}' + \mathbf{u}''}{\mu + \lambda_i} \quad \text{où} \quad \mu = \frac{\mathbf{A}\rho'}{\mathbf{A}\rho''};$$

par suite :

$$(\rho_1 \rho_2 \rho_3 \rho_4) = (\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_3 \mathbf{u}_4) = (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4).$$

Pour trouver les coordonnées de la conjugquée d'une droite $(\mathbf{m}_1, \mathbf{n}_1)$, remarquons que les droites du complexe qui coupent $(\mathbf{m}_1, \mathbf{n}_1)$ satisfont aux relations :

$$\mathbf{A}\mathbf{m} + \mathbf{B}\mathbf{n} = 0$$

$$\mathbf{n}_1 \mathbf{m} + \mathbf{m}_1 \mathbf{n} = 0$$

et par suite à

$$(\mathbf{n}_1 + \lambda \mathbf{A})\mathbf{m} + (\mathbf{m}_1 + \lambda \mathbf{B})\mathbf{n} = 0.$$

Déterminons λ de telle sorte que

$$(\mathbf{n}_1 + \lambda \mathbf{A})(\mathbf{m}_1 + \lambda \mathbf{B}) = 0;$$

on a :

$$\lambda = -\frac{\mathbf{A}\mathbf{m}_1 + \mathbf{B}\mathbf{n}_1}{\mathbf{A}\mathbf{B}} \equiv -\frac{\mathbf{C}_1}{\mathbf{A}\mathbf{B}}.$$

Conjuguées. — Lorsqu'un plan tourne autour de l'axe du faisceau

$$\frac{\lambda' \mathbf{u}' + \lambda'' \mathbf{u}''}{\lambda' + \lambda''}$$

son pôle

$$\frac{\mu \rho' + \rho''}{\mu \lambda' + \lambda''}$$

décrit la droite qui joint ρ' et ρ'' . Les deux droites déterminées par $(\mathbf{u}', \mathbf{u}'')$ et (ρ', ρ'') sont dites *conjuguées*.

Corollaire. — Le plan

$$\mathbf{u}_i = \frac{\mathbf{u}' + \lambda_i \mathbf{u}''}{1 + \lambda_i} \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

a pour pôle

$$\rho_i = \frac{\mu \rho' + \rho''}{\mu + \lambda_i} \quad \text{où} \quad \mu = \frac{\mathbf{B}\mathbf{u}'}{\mathbf{B}\mathbf{u}''};$$

par suite :

$$(\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_3 \mathbf{u}_4) = (\rho_1 \rho_2 \rho_3 \rho_4) = (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4).$$

Pour trouver les coordonnées de la conjugquée d'une droite $(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1)$, remarquons que les droites du complexe qui coupent $(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1)$ satisfont aux relations :

$$\mathbf{B}\mathbf{p} + \mathbf{A}\mathbf{q} = 0$$

$$\mathbf{q}_1 \mathbf{p} + \mathbf{p}_1 \mathbf{q} = 0$$

et par suite à

$$(\mathbf{q}_1 + \lambda \mathbf{B})\mathbf{p} + (\mathbf{p}_1 + \lambda \mathbf{A})\mathbf{q} = 0.$$

Déterminons λ de telle sorte que

$$(\mathbf{q}_1 + \lambda \mathbf{B})(\mathbf{p}_1 + \lambda \mathbf{A}) = 0;$$

on a :

$$\lambda = -\frac{\mathbf{B}\mathbf{p}_1 + \mathbf{A}\mathbf{q}_1}{\mathbf{B}\mathbf{A}} \equiv -\frac{\mathbf{K}_1}{\mathbf{B}\mathbf{A}}.$$

La conjuguée de $(\mathbf{m}_1, \mathbf{n}_1)$ a donc pour coordonnées

$$\mathbf{m}'_1 = \mathbf{m}_1 - \frac{C_1}{\mathbf{AB}} \cdot \mathbf{B}, \quad \mathbf{n}'_1 = \mathbf{n}_1 - \frac{C_1}{\mathbf{AB}} \cdot \mathbf{A}. \quad (221)$$

Corollaire I. — On vérifie aisément que :

$$\mathbf{Am}_1 + \mathbf{Bn}'_1 = 0$$

et $\mathbf{Am}'_1 + \mathbf{Bn}_1 = 0$;

par suite

$$\mathbf{Am}_1 + \mathbf{Bn}_1 + \mathbf{Am}'_1 + \mathbf{Bn}'_1 = 0$$

ou $C_1 + C'_1 = 0$.

On en conclut que :

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{m}_1}{C_1} + \frac{\mathbf{m}'_1}{C'_1} &= \frac{\mathbf{B}}{\mathbf{AB}} \\ \frac{\mathbf{n}_1}{C_1} + \frac{\mathbf{n}'_1}{C'_1} &= \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{AB}}. \end{aligned} \quad (223)$$

Corollaire II. — Toute droite du complexe est sa propre conjuguée, car (221) $C_1 = 0$. Par suite, toute droite du complexe est le support d'une corrélation : lorsqu'un point $\mathbf{p}$ décrit $(\mathbf{m}, \mathbf{n})$, son plan polaire tourne autour de $(\mathbf{m}, \mathbf{n})^*$.

Corollaire III. — Si une droite $(\mathbf{m}, \mathbf{n})$ rencontre $(\mathbf{m}_1, \mathbf{n}_1)$ et sa conjuguée $(\mathbf{m}'_1, \mathbf{n}'_1)$, elle appartient au complexe ; on le vérifie aisément en multipliant les deux membres des égalités (223) par $\mathbf{n}$ et $\mathbf{m}$, et ajoutant.

Réciproque. — Si $(\mathbf{m}, \mathbf{n})$ appartient au complexe C et coupe $(\mathbf{m}_1, \mathbf{n}_1)$ elle coupe aussi sa conjuguée $(\mathbf{m}'_1, \mathbf{n}'_1)$.

La conjuguée de $(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1)$ a donc pour coordonnées

$$\mathbf{p}'_1 = \mathbf{p}_1 - \frac{K_1}{\mathbf{BA}} \cdot \mathbf{A}, \quad \mathbf{q}'_1 = \mathbf{q}_1 - \frac{K_1}{\mathbf{BA}} \cdot \mathbf{B}. \quad (222)$$

Corollaire I. — On vérifie aisément que :

$$\mathbf{Bp}_1 + \mathbf{Aq}'_1 = 0$$

et $\mathbf{Bp}'_1 + \mathbf{Aq}_1 = 0$;

par suite :

$$\mathbf{Bp}_1 + \mathbf{Aq}_1 + \mathbf{Bp}'_1 + \mathbf{Aq}'_1 = 0$$

ou $K_1 + K'_1 = 0$.

On en conclut que :

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{p}_1}{K_1} + \frac{\mathbf{p}'_1}{K'_1} &= \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{BA}} \\ \frac{\mathbf{q}_1}{K_1} + \frac{\mathbf{q}'_1}{K'_1} &= \frac{\mathbf{B}}{\mathbf{BA}}. \end{aligned} \quad (224)$$

Corollaire II. — Toute droite du complexe est sa propre conjuguée, car (222) $K_1 = 0$. Par suite, toute droite du complexe est le support d'une corrélation : lorsqu'un plan $\mathbf{u}$ tourne autour de $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, son pôle décrit $(\mathbf{p}, \mathbf{q})^*$.

Corollaire III. — Si une droite $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ rencontre $(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1)$ et sa conjuguée $(\mathbf{p}'_1, \mathbf{q}'_1)$, elle appartient au complexe ; on le vérifie aisément en multipliant les deux membres des égalités (224) par $\mathbf{q}$ et $\mathbf{p}$, et ajoutant.

Réciproque. — Si $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ appartient au complexe K et coupe $(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1)$, elle coupe aussi sa conjuguée $(\mathbf{p}'_1, \mathbf{q}'_1)$.

* ZINDLER, I, p. 132.

Corollaire IV.* — Deux droites $(\mathbf{m}_1, \mathbf{n}_1)$ et $(\mathbf{m}_2, \mathbf{n}_2)$ sont conjuguées par rapport à C si l'on peut trouver trois nombres λ_i tels que

$$\begin{aligned}\lambda_1 \mathbf{m}_1 + \lambda_2 \mathbf{m}_2 + \lambda_3 \mathbf{B} &= 0 \\ \lambda_1 \mathbf{n}_1 + \lambda_2 \mathbf{n}_2 + \lambda_3 \mathbf{A} &= 0.\end{aligned}\quad (225)$$

En effet, si les conditions (225) sont remplies toute droite $(\mathbf{m}, \mathbf{n})$ vérifie la relation

$$\lambda_1 (\mathbf{m}_1 \mathbf{n} + \mathbf{n}_1 \mathbf{m}) + \lambda_2 (\mathbf{m}_2 \mathbf{n} + \mathbf{n}_2 \mathbf{m}) + \lambda_3 (\mathbf{B} \mathbf{n} + \mathbf{A} \mathbf{m}) = 0;$$

mais si $(\mathbf{m}, \mathbf{n})$ s'appuie sur $(\mathbf{m}_1, \mathbf{n}_1)$ et $(\mathbf{m}_2, \mathbf{n}_2)$, les deux premiers termes de cette relation s'annulent et il reste

$$\mathbf{A} \mathbf{m} + \mathbf{B} \mathbf{n} = 0,$$

c'est-à-dire que $(\mathbf{m}, \mathbf{n})$ appartient au complexe; par suite $(\mathbf{m}_1, \mathbf{n}_1)$ et $(\mathbf{m}_2, \mathbf{n}_2)$ sont conjuguées par rapport à C.

Théorème. — Si une droite $(\mathbf{m}, \mathbf{n})$ décrit une gerbe de sommet ρ_0 , sa conjuguée $(\mathbf{m}', \mathbf{n}')$ décrit un champ dont le plan est le plan polaire $\mathbf{u}_0$ de ρ_0 .

Par hypothèse, on a :

$$\nabla_{\rho_0} \mathbf{m} + \mathbf{n} = 0$$

par suite :

$$\nabla_{\rho_0} \mathbf{m}' + \mathbf{n}' = \lambda (\nabla_{\rho_0} \mathbf{B} + \mathbf{A}).$$

Pour déterminer λ , multiplions scalairement par ρ_0 , il vient :

$$\lambda = \frac{\rho_0 \mathbf{n}'}{\rho_0 \mathbf{A}};$$

d'où

$$\frac{\nabla_{\rho_0} \mathbf{m}' + \mathbf{n}'}{-\rho_0 \mathbf{n}'} = \frac{\nabla_{\rho_0} \mathbf{B} + \mathbf{A}}{-\rho_0 \mathbf{A}};$$

Corollaire IV.* — Deux droites $(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1)$ et $(\mathbf{p}_2, \mathbf{q}_2)$ sont conjuguées par rapport à K si l'on peut trouver trois nombres λ_i tels que

$$\begin{aligned}\lambda_1 \mathbf{p}_1 + \lambda_2 \mathbf{p}_2 + \lambda_3 \mathbf{A} &= 0 \\ \lambda_1 \mathbf{q}_1 + \lambda_2 \mathbf{q}_2 + \lambda_3 \mathbf{B} &= 0.\end{aligned}\quad (226)$$

En effet, si les conditions (226) sont remplies toute droite $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ vérifie la relation

$$\lambda_1 (\mathbf{p}_1 \mathbf{q} + \mathbf{q}_1 \mathbf{p}) + \lambda_2 (\mathbf{p}_2 \mathbf{q} + \mathbf{q}_2 \mathbf{p}) + \lambda_3 (\mathbf{A} \mathbf{q} + \mathbf{B} \mathbf{p}) = 0;$$

mais si $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ s'appuie sur $(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1)$ et $(\mathbf{p}_2, \mathbf{q}_2)$, les deux premiers termes de cette relation s'annulent et il reste

$$\mathbf{A} \mathbf{q} + \mathbf{B} \mathbf{p} = 0,$$

c'est-à-dire que $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ appartient au complexe; par suite $(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1)$ et $(\mathbf{p}_2, \mathbf{q}_2)$ sont conjuguées par rapport à K.

Théorème. — Si une droite $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ décrit un champ $\mathbf{u}_0$, sa conjuguée $(\mathbf{p}', \mathbf{q}')$ décrit une gerbe dont le sommet est le pôle ρ_0 de $\mathbf{u}_0$.

Par hypothèse, on a :

$$\nabla_{\mathbf{u}_0} \mathbf{p} + \mathbf{q} = 0$$

par suite :

$$\nabla_{\mathbf{u}_0} \mathbf{p}' + \mathbf{q}' = \lambda (\nabla_{\mathbf{u}_0} \mathbf{A} + \mathbf{B}).$$

Pour déterminer λ , multiplions scalairement par $\mathbf{u}_0$, il vient :

$$\lambda = \frac{\mathbf{u}_0 \mathbf{q}'}{\mathbf{u}_0 \mathbf{B}};$$

d'où

$$\frac{\nabla_{\mathbf{u}_0} \mathbf{p}' + \mathbf{q}'}{-\mathbf{u}_0 \mathbf{q}'} = \frac{\nabla_{\mathbf{u}_0} \mathbf{A} + \mathbf{B}}{-\mathbf{u}_0 \mathbf{B}};$$

* Ce corollaire est dû à M. Daniëls.

donc le plan déterminé par ρ_0 et $(\mathbf{m}', \mathbf{n}')$ est le même que le plan polaire de ρ_0 .
 donc le point d'intersection de $\mathbf{u}_0$ et $(\mathbf{p}', \mathbf{q}')$ est le même que le pôle de $\mathbf{u}_0$.

Des propositions qui précèdent, il résulte une transformation intéressante des figures : la *transformation par droites conjuguées*. Dans cette transformation :

- à un point correspond un plan ; c'est le plan polaire du point ;
- à une droite correspond une droite ; les deux sont conjuguées ;
- à un plan correspond un point ; c'est le pôle du plan *.

Diamètre. — Dans un complexe linéaire on appelle diamètre les conjuguées des droites de l'infini. D'après cette définition le diamètre est la conjuguée du rayon $(0, \mathbf{n})$; ses coordonnées sont donc :

$$\begin{aligned} \mathbf{m}' &= \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} \mathbf{n} \\ \text{et } \mathbf{n}' &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \mathbf{n} - \mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \mathbf{B} = \sqrt{\mathbf{B}} \sqrt{\mathbf{A}} \mathbf{n} \end{aligned} \quad (227)$$

Coroll. I. — Tous les diamètres sont parallèles entre eux : ils sont parallèles à $\mathbf{B}$.

Coroll. II. — Des plans parallèles ont leurs pôles sur un diamètre, car l'intersection de ces plans a pour coordonnées $(0, \mathbf{n})$.

Axe central. — Au lieu de prendre $\mathbf{n}$ quelconque, prenons $\mathbf{n} = \mathbf{B}$; alors $(0, \mathbf{B})$ est une droite de l'infini perpendiculaire à la direction des diamètres. Sa conjuguée est l'axe central du complexe linéaire ; ses coordonnées sont :

$$\begin{aligned} &\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^2 \quad \text{et} \quad \sqrt{\mathbf{B}} \sqrt{\mathbf{A}} \mathbf{B} \\ \text{ou} \quad &\mathbf{B} \quad \text{et} \quad \mathbf{A} - k \mathbf{B} \end{aligned} \quad (229)$$

$$\text{en posant} \quad k \equiv \frac{\mathbf{A} \mathbf{B}}{\mathbf{B}^2} \quad (231)$$

Diamètre. — Dans un complexe linéaire on appelle diamètres les conjuguées des droites de l'infini. D'après cette définition le diamètre est la conjuguée de l'axe $(\mathbf{p}, 0)$; ses coordonnées sont donc :

$$\begin{aligned} \mathbf{p}' &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \mathbf{p} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{B} \mathbf{A} = \sqrt{\mathbf{B}} \sqrt{\mathbf{A}} \mathbf{p} \\ \text{et} \quad \mathbf{q}' &= \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} \mathbf{p} \end{aligned} \quad (228)$$

Coroll. I. — Tous les diamètres sont parallèles entre eux : ils sont parallèles à $\mathbf{B}$.

Coroll. II. — Des plans parallèles ont leurs pôles sur un diamètre, car l'intersection de ces plans a pour coordonnées $(\mathbf{p}, 0)$.

Axe central. — Au lieu de prendre $\mathbf{p}$ quelconque, prenons $\mathbf{p} = \mathbf{B}$; alors $(\mathbf{B}, 0)$ est une droite de l'infini normale à la direction des diamètres. Sa conjuguée est l'axe central du complexe linéaire ; ses coordonnées sont :

$$\begin{aligned} &\sqrt{\mathbf{B}} \sqrt{\mathbf{A}} \mathbf{B} \quad \text{et} \quad \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^2 \\ \text{ou} \quad &\mathbf{A} - k \mathbf{B} \quad \text{et} \quad \mathbf{B} \end{aligned} \quad (230)$$

$$\text{en posant} \quad k \equiv \frac{\mathbf{B} \mathbf{A}}{\mathbf{B}^2} \quad (232)$$

* Pour plus de développements voir KÆNIGS, *Leçons de cinématique*, p. 45.

Cette quantité k est le paramètre du complexe C .

Cette quantité k est le paramètre du complexe K .

Remarque I. — Si $k > 0$ le complexe est dextrorsum, si $k < 0$ il est sinistrorsum.

Remarque II. — Si $B^2 = 1$, on a $k = AB$; dans ce cas, le complexe est une vis, et k est le pas de la vis*.

Théorème. — Le paramètre est un invariant pour un changement d'origine.

Effectuons le changement

$$\rho = \rho_0 + \rho' :$$

alors $m = m'$, $n = n' - \sqrt{\rho} m'$ et l'équation du complexe devient :

$$(A + \sqrt{\rho_0} B)m' + Bn' = 0. \quad (233)$$

La valeur k' du paramètre de ce complexe

$$k' = \frac{(A + \sqrt{\rho_0} B)B}{B^2} = \frac{AB}{B^2} \quad (235)$$

est la même qu'avant le changement d'origine.

Problème. — Que devient le paramètre lorsqu'on effectue la transformation

$$\rho = \rho_0 + \Phi \rho' ?$$

On a :

$$m = \Phi m', \quad n = \Phi_2 n' - \sqrt{\rho_0} \Phi m' ;$$

substituons dans l'équation du complexe; elle devient :

$$(\Phi_c A + \Phi_c \sqrt{\rho_0} B)m' + (\Phi_{2c} B)n' = 0. \quad (237)$$

Le paramètre de ce complexe a pour valeur

$$k' = \frac{A \Phi \Phi_{2c} B + B \Phi_2 \Phi_c \sqrt{\rho_0} B}{(\Phi_{2c} B)^2}$$

Théorème. — Le paramètre est un invariant pour un changement d'origine.

Effectuons le changement

$$u = u_0 + u' ;$$

alors $p = p'$, $q = q' - \sqrt{u} p'$ et l'équation du complexe devient :

$$(B + \sqrt{u_0} A)p' + Aq' = 0. \quad (234)$$

La valeur k' du paramètre de ce complexe

$$k' = \frac{(B + \sqrt{u_0} A)A}{B^2} = \frac{BA}{B^2} \quad (226)$$

est la même qu'avant le changement d'origine.

Problème. — Que devient le paramètre lorsqu'on effectue la transformation

$$u = u_0 + \Phi u' ?$$

On a :

$$p = \Phi p', \quad q = \Phi_2 q' - \sqrt{u_0} \Phi p' ;$$

substituons dans l'équation du complexe; elle devient :

$$(\Phi_c B + \Phi_c \sqrt{u_0} A)p' + (\Phi_{2c} A)q' = 0. \quad (238)$$

Le paramètre de ce complexe a pour valeur

$$k' = \frac{B \Phi \Phi_{2c} A + A \Phi_2 \Phi_c \sqrt{u_0} A}{(\Phi_{2c} B)^2}$$

* Voir Kœnigs, *Leçons de cinématique*, p. 36 et suiv.

mais $\Phi\Phi_{2c} = \Phi_2\Phi_c = \Phi_3\mathbf{I}$,

d'où $k' = \frac{\Phi_3(\mathbf{AB} + [\mathbf{B}\rho_0\mathbf{B}])}{(\Phi_{2c}\mathbf{B})^2}$

ou $k' = \frac{\Phi_3 \cdot \mathbf{AB}}{(\Phi_{2c}\mathbf{B})^2}$. (239)

Corollaire I. — Si $\Phi = \mathbf{I}$, la transformation est un changement d'origine : on retrouve le théorème précédent.

Corollaire II. — Le produit scalaire $\mathbf{AB}$ est un invariant de poids un : il se reproduit, multiplié par le déterminant Φ_3 de la dyadique.

Forme réduite. — Si l'on effectue le changement $\rho = \rho_0 + \rho'$, l'équation du complexe devient :

$$(\mathbf{A} + \sqrt{\rho_0}\mathbf{B})\mathbf{m}' + \mathbf{Bn}' = 0. \quad (233)$$

Prenons le point ρ_0 sur l'axe central : il devra vérifier la relation

$$\sqrt{\rho_0}\mathbf{B} + (\mathbf{A} - k\mathbf{B}) = 0;$$

par suite l'équation précédente devient :

$$k\mathbf{Bm}' + \mathbf{Bn}' = 0. \quad (241)$$

Autre forme. — La plus courte distance d d'une droite $(\mathbf{m}, \mathbf{n})$ du complexe à l'axe central est donné par :

$$d = \frac{|\mathbf{m}(\mathbf{A} - k\mathbf{B}) + \mathbf{nB}|}{|\sqrt{\mathbf{mB}}|} = k \frac{|\mathbf{mB}|}{|\sqrt{\mathbf{mB}}|} = k \operatorname{tg} \theta$$

en désignant par θ l'angle $(\mathbf{m}, \mathbf{B})$;

d'où $\operatorname{tg} \theta = \frac{k}{d}$. (243)

Corollaire I. — Toute droite du complexe qui coupe l'axe central ($d = 0$), lui est perpendiculaire, car $\operatorname{tg} \theta = \infty$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$. Réciproquement toute droite du complexe, perpendiculaire à l'axe central, coupe cet axe.

mais $\Phi\Phi_{2c} = \Phi_2\Phi_c = \Phi_3\mathbf{I}$,

d'où $k' = \frac{\Phi_3(\mathbf{BA} + [\mathbf{Au}_0\mathbf{A}])}{(\Phi_{2c}\mathbf{B})^2}$

ou $k' = \frac{\Phi_3 \cdot \mathbf{BA}}{(\Phi_{2c}\mathbf{B})^2}$. (240)

Corollaire I. — Si $\Phi = \mathbf{I}$, la transformation est un changement d'origine : on retrouve le théorème précédent.

Corollaire II. — Le produit scalaire $\mathbf{BA}$ est un invariant de poids un : il se reproduit multiplié par le déterminant Φ_3 de la dyadique.

Forme réduite. — Si l'on effectue le changement $\rho = \rho_0 + \rho'$, l'équation du complexe devient :

$$\mathbf{Bp}' + (\mathbf{A} + \sqrt{\rho_0}\mathbf{B})\mathbf{q}' = 0. \quad (234)$$

Prenons le point ρ_0 sur l'axe central : il devra vérifier la relation

$$\sqrt{\rho_0}\mathbf{B} + (\mathbf{A} - k\mathbf{B}) = 0;$$

par suite l'équation précédente devient :

$$\mathbf{Bp}' + k\mathbf{Bq}' = 0. \quad (242)$$

Autre forme. — La plus courte distance d d'une droite $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ du complexe à l'axe central est donné par :

$$d = \frac{|\mathbf{q}(\mathbf{A} - k\mathbf{B}) + \mathbf{pB}|}{|\sqrt{\mathbf{qB}}|} = k \frac{|\mathbf{qB}|}{|\sqrt{\mathbf{qB}}|} = k \operatorname{tg} \theta$$

en désignant par θ l'angle $(\mathbf{q}, \mathbf{B})$;

d'où $\operatorname{tg} \theta = \frac{k}{d}$. (243)

Corollaire II. — La perpendiculaire commune à une droite et à sa conjuguée coupe l'axe central à angle droit.

L'équation (243) montre que toutes les droites du complexe linéaire peuvent être considérées comme les tangentes à toutes les hélices enroulées sur les cylindres de révolution dont l'axe est l'axe central du complexe. Le pas des hélices croît avec le rayon d du cylindre, de sorte que les droites du complexe qui coupent d'abord l'axe central (pour $d = 0$), s'éloignent ensuite de cet axe et le croisent sous un angle d'autant plus petit que d est plus grand ; à la limite ($d = \infty$) les droites du complexe deviennent parallèles à l'axe central *.

Complexe spécial.

Un complexe $\mathbf{Am} + \mathbf{Bn} = 0$ est dit spécial lorsque $\mathbf{AB} = 0$, c'est-à-dire lorsque son paramètre est nul. L'axe de ce complexe a pour coordonnées $(\mathbf{B}, \mathbf{A})$. Mais alors toute droite du complexe rencontre l'axe et réciproquement. L'axe est lui-même une droite du complexe.

Corollaire I. — Le plan polaire d'un point quelconque $\mathbf{p}$ est le plan déterminé par l'axe $(\mathbf{B}, \mathbf{A})$ et le point $\mathbf{p}$.

Corollaire II. — Une droite quelconque $(\mathbf{m}, \mathbf{n})$ a pour conjuguée $(\mathbf{B}, \mathbf{A})$ c'est-à-dire l'axe, ce qui montre encore que les plans polaires de tous les points de l'espace passent par l'axe.

Un complexe $\mathbf{Bp} + \mathbf{Aq} = 0$ est dit spécial lorsque $\mathbf{BA} = 0$, c'est-à-dire lorsque son paramètre est nul. L'axe de ce complexe a pour coordonnées $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$. Mais alors toute droite du complexe rencontre l'axe et réciproquement. L'axe est lui-même une droite du complexe.

Corollaire I. — Le pôle d'un plan quelconque $\mathbf{u}$ est l'intersection de l'axe $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ avec le plan $\mathbf{u}$.

Corollaire II. — Une droite quelconque $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ a pour conjuguée $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ c'est-à-dire l'axe, ce qui montre encore que les pôles de tous les plans de l'espace sont situés sur l'axe.

* Voir PLÜCKER, *Neue Geometrie des Raumes*, p. 56 et suivantes ; voir aussi K. ZINDLER, *Liniengeometrie*, t. I, p. 22 et 23.

II. CONGRUENCE LINÉAIRE

Définition. — On appelle congruence linéaire l'ensemble des droites communes à deux complexes linéaires.

$$\begin{aligned} \text{Soient } C_1 &= \mathbf{A}_1 \mathbf{m} + \mathbf{B}_1 \mathbf{n} = 0 \\ C_2 &= \mathbf{A}_2 \mathbf{m} + \mathbf{B}_2 \mathbf{n} = 0 \end{aligned} \quad (244)$$

$$\begin{aligned} \text{Soient } K_1 &= \mathbf{B}_1 \mathbf{p} + \mathbf{A}_1 \mathbf{q} = 0 \\ K_2 &= \mathbf{B}_2 \mathbf{p} + \mathbf{A}_2 \mathbf{q} = 0 \end{aligned} \quad (245)$$

les deux complexes donnés ;

les deux complexes donnés ;

$$C = C_1 + \lambda C_2 \quad (246)$$

$$K = K_1 + \lambda K_2 \quad (247)$$

représentera, quand on fait varier λ , un *faisceau de complexes* ; tous ces complexes renferment les droites communes à C_1 et C_2 (ou à K_1 et K_2). Deux complexes quelconques du faisceau peuvent donc définir la congruence.

Théorème. — Le plan polaire de $\mathbf{p}$ par rapport à C passe par l'intersection $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ des plans polaires de $\mathbf{p}$ par rapport à C_1 et C_2 . En effet, ce plan a pour vecteur

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}_1 + \mu \mathbf{u}_2}{1 + \mu}$$

si l'on pose

$$\mu = \lambda \frac{\mathbf{A}_2 \mathbf{p}}{\mathbf{A}_1 \mathbf{p}}$$

*Corollaire **. — Par suite

$$\frac{\mu}{\mu'} = \frac{\lambda}{\lambda'}$$

est le rapport anharmonique des plans polaires de $\mathbf{p}$ dans les quatre complexes

$$C_1=0 \quad C_2=0 \quad C_1+\lambda C_2=0 \quad C_1+\lambda' C_2=0.$$

Ce rapport anharmonique est indépendant de $\mathbf{p}$.

Théorème. — Le pôle de $\mathbf{u}$ par rapport à K est situé sur le rayon $(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$ qui joint les pôles de $\mathbf{u}$ par rapport à K_1 et K_2 .

En effet, ce point a pour vecteur

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{p}_1 + \nu \mathbf{p}_2}{1 + \nu}$$

si l'on pose

$$\nu = \lambda \frac{\mathbf{B}_2 \mathbf{u}}{\mathbf{B}_1 \mathbf{u}}$$

Corollaire. — Par suite

$$\frac{\nu}{\nu'} = \frac{\lambda}{\lambda'}$$

est le rapport anharmonique des pôles de $\mathbf{u}$ dans les quatre complexes

$$K_1=0 \quad K_2=0 \quad K_1+\lambda K_2=0 \quad K_1+\lambda' K_2=0.$$

Ce rapport anharmonique est indépendant de $\mathbf{u}$.

* CLEBSCH-LINDEMANN, *Vorlesungen über Geometrie*, t. II, I^{re} partie, p. 67.

Par tout point ρ , il passe une droite de la congruence : c'est l'intersection des plans polaires de ρ par rapport à C_1 et C_2 .

Théorème. — Les droites de la congruence qui rencontrent une droite $(\mathbf{m}_1, \mathbf{n}_1)$ n'appartenant pas à la congruence sont sur une quadrique. Cette quadrique a pour équation :

$$\rho\Phi\rho + 2\mathbf{A}\rho + [\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\mathbf{n}_1] = 0$$

où

$$\Phi = \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{B}_2 \mathbf{m}_1 + \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{B}_1 \mathbf{m}_1 + \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_2$$

et

$$2\mathbf{A} = \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_2 \mathbf{n}_1 + \mathbf{B}_2 \mathbf{n}_1 \mathbf{A}_1 + \mathbf{m}_1 \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2.$$

Dans tout plan $\mathbf{u}$ il y a une droite de la congruence : c'est la droite qui joint les pôles de $\mathbf{u}$ par rapport à K_1 et K_2 .

Théorème. — Les droites de la congruence qui rencontrent une droite $(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1)$ n'appartenant pas à la congruence sont sur une quadrique. Cette quadrique a pour équation :

$$\mathbf{u}\Psi\mathbf{u} + 2\mathbf{B}\mathbf{u} + [\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2\mathbf{q}_1] = 0$$

où

$$\Psi = \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{A}_2 \mathbf{p}_1 + \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{A}_1 \mathbf{p}_1 + \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2$$

et

$$2\mathbf{B} = \mathbf{A}_1 \mathbf{B}_2 \mathbf{q}_1 + \mathbf{A}_2 \mathbf{q}_1 \mathbf{B}_1 + \mathbf{p}_1 \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_2.$$

Directrices. — *Théorème.* — Par la congruence, il passe une infinité de complexes dont deux spéciaux.

Pour qu'un complexe du faisceau soit spécial il faut que

$$(\mathbf{A}_1 + \lambda \mathbf{A}_2)(\mathbf{B}_1 + \lambda \mathbf{B}_2) = 0$$

ou

$$\mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1 + \lambda(\mathbf{A}_1 \mathbf{B}_2 + \mathbf{A}_2 \mathbf{B}_1) + \lambda^2 \mathbf{A}_2 \mathbf{B}_2 = 0.$$

Supposons que $|\mathbf{B}_1| = |\mathbf{B}_2| = 1$, alors $\mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1 = k_1$, $\mathbf{A}_2 \mathbf{B}_2 = k_2$; de plus, désignons avec M. Klein * par $m_{12} = \mathbf{A}_1 \mathbf{B}_2 + \mathbf{A}_2 \mathbf{B}_1$ le moment des deux complexes donnés; dans ces conditions, l'équation en λ devient :

$$k_1 + m_{12}\lambda + k_2\lambda^2 = 0. \quad (248)$$

Cette équation étant du second degré donne deux valeurs pour λ et par suite deux complexes spéciaux contenus dans le faisceau; les axes de ces deux complexes sont les directrices de la congruence.

Remarque. — Si, sur les deux complexes, on effectue la même transformation

$$\rho = \rho_0 + \Phi\rho'$$

Remarque. — Si, sur les deux complexes, on effectue la même transformation

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \Phi\mathbf{u}'$$

* *Math. Ann.*, II, p. 368.

le moment des deux complexes se reproduit multiplié par le déterminant Φ_3 de la dyadique.

En désignant par m_{12} et m'_{12} ce moment, avant et après la transformation, on a (237) :

$$\begin{aligned} m'_{12} &= \Phi_c(A_1 + \sqrt{\rho_c} B_1) \Phi_{2c} B_2 + \Phi_c(A_2 + \sqrt{\rho_c} B_2) \Phi_{2c} B_1 \\ &= \Phi_3 \cdot (A_1 B_2 + A_2 B_1) + \Phi_3 ([\rho_c B_1 B_2] + [\rho_c B_2 B_1]) \\ &= \Phi_3 \cdot m_{12}^*. \end{aligned} \quad (249)$$

En particulier, pour un changement d'origine on a : $m'_{12} = m_{12}$.

le moment des deux complexes se reproduit multiplié par le déterminant Φ_3 de la dyadique.

En désignant par m_{12} et m'_{12} ce moment, avant et après la transformation, on a (238) :

$$\begin{aligned} m'_{12} &= \Phi_c(B_1 + \sqrt{u_c} A_1) \Phi_{2c} A_2 + \Phi_c(B_2 + \sqrt{u_c} A_2) \Phi_{2c} A_1 \\ &= \Phi_3 (A_1 B_2 + A_2 B_1) + \Phi_3 ([u_c A_1 A_2] + [u_c A_2 A_1]) \\ &= \Phi_3 \cdot m_{12}^*. \end{aligned} \quad (250)$$

En particulier si $\Phi = \mathbf{I}$, on a : $m'_{12} = m_{12}$.

Voyons ce que devient la congruence suivant les valeurs des racines de l'équation (248) :

a) $m_{12}^2 - 4k_1 k_2 > 0$. — Les deux directrices de la congruence sont réelles et distinctes : leurs coordonnées sont :

$$D'(\mathbf{B}' = \mathbf{B}_1 + \lambda' \mathbf{B}_2, \mathbf{A}' = \mathbf{A}_1 + \lambda' \mathbf{A}_2) \text{ et } D''(\mathbf{B}'' = \mathbf{B}_1 + \lambda'' \mathbf{B}_2, \mathbf{A}'' = \mathbf{A}_1 + \lambda'' \mathbf{A}_2).$$

La congruence est dite *hyperbolique* ; les droites appartenant à la congruence sont toutes celles qui coupent D' et D'' .

Théorème. — D' et D'' sont conjuguées par rapport à tout complexe du faisceau.

En effet, on peut trouver trois nombres

$$\mu = \lambda' - \lambda'' \quad \mu' = \lambda'' - \lambda \quad \mu'' = \lambda - \lambda'$$

qui vérifient les relations **

$$\mu \mathbf{B} + \mu' \mathbf{B}' + \mu'' \mathbf{B}'' = 0 \quad \mu \mathbf{A} + \mu' \mathbf{A}' + \mu'' \mathbf{A}'' = 0.$$

L'axe principale de la congruence est la perpendiculaire commune aux deux directrices ; ses coordonnées sont :

$$\sqrt{\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_2} \text{ et } \frac{1}{(\sqrt{\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_2})^2} \{ [\mathbf{A}_2 \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_2] \cdot \sqrt{\mathbf{B}_1} \sqrt{\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_2} - [\mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_2] \cdot \sqrt{\mathbf{B}_2} \sqrt{\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_2} \} \quad (251)$$

Le milieu de cet axe est le centre de la congruence.*

* Cet invariant m_{12} est aussi appelé quelquefois le combinant des deux complexes. (Cf. KÆNIGS, *Ann. de Toulouse*, VI, 1892, p. 14.)

** C'est une application des formules (225) et (226).

Les axes centraux des complexes du faisceau sont perpendiculaires à l'axe de la congruence, car si $\mathbf{B}_1 + \lambda \mathbf{B}_2$ et $\mathbf{A}_1 - k_1 \mathbf{B}_1 + \lambda (\mathbf{A}_2 - k_2 \mathbf{B}_2)$ sont les coordonnées de l'axe central d'un complexe du faisceau, on a, quel que soit λ

$$(\mathbf{B}_1 + \lambda \mathbf{B}_2) \vee \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_2 = 0$$

et ils coupent cet axe car

$$\frac{1}{(\vee \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_2)^2} \{ -\lambda (\vee \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_2)^2 [\mathbf{A}_2 \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_2] - (\vee \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_2)^2 [\mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_2] \} + [\mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_2] + \lambda [\mathbf{A}_2 \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_2] = 0.$$

Forme réduite. — Prenons pour origine le centre et pour axe Oz l'axe de la congruence, pour Ox et Oy les bissectrices *, menées par O, des angles formés par D' et D''. De plus, désignons par $2l$ le paramètre de la congruence c'est-à-dire la plus courte distance de D' et D'', et par 2θ l'angle de ces deux directrices. Dans ce système d'axes les coordonnées de deux points particuliers de D' et D'' seront

$$D' \begin{cases} 0, & 0, & 1 \\ \cos \theta, & \sin \theta, & 1 \end{cases} \quad D'' \begin{cases} 0, & 0, & -1 \\ \cos \theta, & -\sin \theta, & -1 \end{cases}$$

et les coordonnées des deux directrices deviennent :

$$D' \begin{cases} \mathbf{B}' = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j} \\ \mathbf{A}' = l \sin \theta \mathbf{i} - l \cos \theta \mathbf{j} \end{cases} \quad D'' \begin{cases} \mathbf{B}'' = \cos \theta \mathbf{i} - \sin \theta \mathbf{j} \\ \mathbf{A}'' = l \sin \theta \mathbf{i} + l \cos \theta \mathbf{j} \end{cases} \quad (252)$$

Les complexes qui définissent la congruence peuvent donc être remplacés par

$$\begin{array}{l|l} \mathbf{A}'\mathbf{m} + \mathbf{B}'\mathbf{n} = 0 & \text{et } \mathbf{A}''\mathbf{m} + \mathbf{B}''\mathbf{n} = 0 \\ \text{ou } (\mathbf{A}' + \mathbf{A}'')\mathbf{m} + (\mathbf{B}' + \mathbf{B}'')\mathbf{n} = 0 & \text{ou } (\mathbf{B}' + \mathbf{B}'')\mathbf{p} + (\mathbf{A}' + \mathbf{A}'')\mathbf{q} = 0 \\ \text{et } (\mathbf{A}' - \mathbf{A}'')\mathbf{m} + (\mathbf{B}' - \mathbf{B}'')\mathbf{n} = 0 & \text{et } (\mathbf{B}' - \mathbf{B}'')\mathbf{p} + (\mathbf{A}' - \mathbf{A}'')\mathbf{q} = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} (253) \\ (254) \end{array}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{array}{l|l} l m_1 \sin \theta + n_1 \cos \theta = 0 & l q_1 \sin \theta + p_1 \cos \theta = 0 \\ \text{et } -l m_2 \cos \theta + n_2 \sin \theta = 0 & \text{et } -l q_2 \cos \theta + p_2 \sin \theta = 0 \\ \text{ou} & \text{ou} \\ \frac{n_1}{m_1} = -l \operatorname{tg} \theta & \text{et } \frac{n_2}{m_2} = l \cot \theta^{**} \quad (255) \end{array} \quad \begin{array}{l} \frac{p_1}{q_1} = -l \operatorname{tg} \theta & \text{et } \frac{p_2}{q_2} = l \cot \theta^{**} \quad (256) \end{array}$$

* Ce sont les axes secondaires (Nebenaxen) de la congruence. Cf. PLÜCKER, *Neue Geometrie*, p. 71.

** Voir ZINDLER, *Liniengeometrie*, I, p. 177, 178. — CLEBSCH-LINDEMANN, *l. c.*, p. 60.

Cylindroïde. — Un complexe quelconque du faisceau passant par la congruence est donné par

$$(\mathbf{A}' + \mu \mathbf{A}'')\mathbf{m} + (\mathbf{B}' + \mu \mathbf{B}'')\mathbf{n} = 0 \quad | \quad (\mathbf{B}' + \mu \mathbf{B}'')\mathbf{p} + (\mathbf{A}' + \mu \mathbf{A}'')\mathbf{q} = 0$$

μ étant un paramètre. L'axe central de ce complexe a pour coordonnées

$$\begin{array}{l|l} \mathbf{m}_0 = \mathbf{B}' + \mu \mathbf{B}'' & (257) \\ \mathbf{n}_0 = (\mathbf{A}' + \mu \mathbf{A}'') - k(\mathbf{B}' + \mu \mathbf{B}'') & \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \mathbf{p}_0 = (\mathbf{A}' + \mu \mathbf{A}'') - k(\mathbf{B}' + \mu \mathbf{B}'') \\ \mathbf{q}_0 = \mathbf{B}' + \mu \mathbf{B}'' \end{array} \right. \quad (258)$$

en posant :

$$k = \frac{(\mathbf{A}' + \mu \mathbf{A}'')(\mathbf{B}' + \mu \mathbf{B}'')}{(\mathbf{B}' + \mu \mathbf{B}'')^2} = \mu \frac{\mathbf{A}'\mathbf{B}'' + \mathbf{A}''\mathbf{B}'}{(\mathbf{B}' + \mu \mathbf{B}'')^2} = \mu \frac{2\sin 2\theta}{1 + 2\mu \cos 2\theta + \mu^2} \quad (259)$$

Un point quelconque ρ de cet axe central satisfait à la relation

$$\sqrt{\rho \mathbf{m}_0 + \mathbf{n}_0} = 0 \quad (260)$$

ou

$$\sqrt{\rho(\mathbf{B}' + \mu \mathbf{B}'') + \mathbf{A}' + \mu \mathbf{A}'' - k(\mathbf{B}' + \mu \mathbf{B}'')} = 0. \quad (262)$$

Cette équation représente, comme on va le voir, une surface du troisième ordre que Cayley appelle cylindroïde ; on l'appelle aussi quelquefois conoïde de Plücker.

Résolvons l'équation (260) par rapport à ρ , on a :

$$\rho = \frac{\sqrt{\mathbf{n}_0 \mathbf{m}_0}}{\mathbf{m}_0^2} + \lambda \mathbf{m}_0$$

λ étant un paramètre arbitraire. L'équation (262) du cylindroïde peut donc encore s'écrire :

$$\rho = \frac{(\mathbf{A}' + \mu \mathbf{A}'')(\mathbf{B}' + \mu \mathbf{B}'')}{(\mathbf{B}' + \mu \mathbf{B}'')^2} + \lambda(\mathbf{B}' + \mu \mathbf{B}'')$$

ou

$$\begin{aligned} \rho = & \lambda(1 + \mu) \cos \theta \mathbf{i} + \lambda(1 - \mu) \sin \theta \mathbf{j} + \\ & + \frac{1(1 - \mu^2)}{1 + 2\mu \cos 2\theta + \mu^2} \mathbf{k} \quad (264) \end{aligned}$$

Un plan quelconque $\mathbf{u}$ passant par cet axe central satisfait à la relation

$$\sqrt{\mathbf{u} \mathbf{p}_0 + \mathbf{q}_0} = 0 \quad (261)$$

ou

$$\sqrt{\mathbf{u}(\mathbf{A}' + \mu \mathbf{A}'') - k(\mathbf{B}' + \mu \mathbf{B}'') + \mathbf{B}' + \mu \mathbf{B}''} = 0. \quad (263)$$

Cette équation représente, comme on va le voir, une surface de troisième classe : c'est le cylindroïde, appelé aussi quelquefois conoïde de Plücker.

Résolvons l'équation (261) par rapport à $\mathbf{u}$, on a :

$$\mathbf{u} = \frac{\sqrt{\mathbf{q}_0 \mathbf{p}_0}}{\mathbf{p}_0^2} + \lambda \mathbf{p}_0$$

λ étant un paramètre arbitraire. L'équation (263) du cylindroïde peut donc encore s'écrire :

$$\mathbf{u} = \frac{(\mathbf{B}' + \mu \mathbf{B}'')(\mathbf{A}' + \mu \mathbf{A}'')}{\{(\mathbf{A}' + \mu \mathbf{A}'') - k(\mathbf{B}' + \mu \mathbf{B}'')\}^2} + \lambda \{(\mathbf{A}' + \mu \mathbf{A}'') - k(\mathbf{B}' + \mu \mathbf{B}'')\}$$

ou

$$\begin{aligned} \mathbf{u} = & \lambda(\mu + 1)(\sin \theta - k \cos \theta) \mathbf{i} + \lambda(\mu - 1)(\cos \theta + k \sin \theta) \mathbf{j} \\ & + \frac{1(\mu^2 - 1)}{\mu^2 + 1 - k^2 + 1 + 2\mu\{1 - k^2 - 1^2 \cos 2\theta - 2k \sin 2\theta\}} \mathbf{k} \end{aligned}$$

De l'équation (264) il nous est facile de déduire les équations cartésiennes du cylindroïde ; sous forme paramétrale on a évidemment :

$$\begin{aligned} x &= \lambda(1 + \mu) \cos \theta \\ y &= \lambda(1 - \mu) \sin \theta \\ z &= \frac{\lambda(1 - \mu^2)}{1 + 2\mu \cos 2\theta + \mu^2} \end{aligned} \quad (266)$$

Eliminant λ et μ entre ces trois équations on trouve aisément :

$$z(x^2 + y^2) \sin 2\theta - 2\lambda xy = 0^* \quad (268)$$

A toute valeur z_0 de z la troisième des équations paramétrales fait correspondre une équation du deuxième degré en μ qui fournit deux complexes du faisceau et par suite deux axes centraux situés sur le cylindroïde. L'équation en μ a ses racines réelles si

$$|z| \leq \frac{1}{\sin \theta}.$$

Dans le cas particulier où $z = 0$, on a $\mu = \pm 1$: on retrouve les deux complexes de la forme réduite ; leurs axes centraux sont rectangulaires car

$$(\mathbf{B}' + \mathbf{B}'')(\mathbf{B}' - \mathbf{B}'') = 0. \quad (274)$$

ou encore :

$$\mathbf{u} = \lambda(\mu + 1)(\sin \theta - k \cos \theta) \mathbf{i} + \lambda(\mu - 1)(\cos \theta + k \sin \theta) \mathbf{j} \\ + \frac{\lambda(\mu^2 - 1)}{\mu + 1)^2 (\sin \theta - k \cos \theta)^2 + (\mu - 1)^2 (\cos \theta + k \sin \theta)^2} \mathbf{k} \quad (265)$$

Les équations paramétrales de la surface sont donc :

$$\begin{aligned} u &= \lambda(\mu + 1)(\sin \theta - k \cos \theta) \\ v &= \lambda(\mu - 1)(\cos \theta + k \sin \theta) \\ w &= \frac{\lambda(\mu^2 - 1)}{(\mu + 1)^2 (\sin \theta - k \cos \theta)^2 + (\mu - 1)^2 (\cos \theta + k \sin \theta)^2} \end{aligned} \quad (267)$$

Au lieu de déduire l'équation tangentielle du cylindroïde de ses équations paramétrales, il est plus simple de les tirer de son équation vectorielle (263) ; en passant aux coordonnées cartésiennes, on a :

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u & v & w \\ (\mu + 1)(\sin \theta - k \cos \theta) & (\mu - 1)(\cos \theta + k \sin \theta) & 0 \end{vmatrix} \\ + (1 + \mu) \cos \theta \mathbf{i} + (1 - \mu) \sin \theta \mathbf{j} = 0 \quad (269)$$

Egalons à zéro les trois composantes, il vient :

$$w(1 - \mu)(\cos \theta + k \sin \theta) + (1 + \mu) \cos \theta = 0 \quad (270)$$

$$w(1 + \mu)(\sin \theta - k \cos \theta) + (1 - \mu) \sin \theta = 0 \quad (271)$$

$$u(\mu - 1)(\cos \theta + k \sin \theta) - v(\mu + 1)(\sin \theta - k \cos \theta) = 0 \quad (272)$$

De (272) on tire

$$\frac{u}{v} = \frac{\mu + 1}{\mu - 1} \cdot \frac{\lg \theta - k}{1 + k \lg \theta};$$

par suite (270) et (271) deviennent

$$w - \frac{u}{v} \frac{1}{\lg \theta - k} = 0$$

* Voir CLEBSCH-LINDEMANN, *l. c.*, p. 61.

Remarque. — Lorsque la congruence est *rectangulaire*, c'est-à-dire lorsque $\mathbf{B}\mathbf{B}'' = 0$, l'équation (268) du cylindroïde devient

$$z(x^2 + y^2) - 2lxy = 0 \quad (268)$$

et l'équation (264)

$$\rho = \lambda'(1 + \mu)\mathbf{i} + \lambda'(1 - \mu)\mathbf{j} + l \frac{1 - \mu^2}{1 + \mu^2} \mathbf{k}. \quad (264')$$

$$\text{et} \quad w - \frac{u}{v} \frac{1}{l \cotg \theta + k} = 0.$$

Eliminant k entre ces deux équations, on a :

$$(u^2 + v^2) \sin 2\theta - 2luvw = 0. \quad (273)$$

C'est l'équation tangentielle du cylindroïde.

Congruence parabolique *. — Lorsque $\sqrt{\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_2} = 0$, les axes de tous les complexes du faisceau sont parallèles entre eux : la congruence est dite *parabolique*. Si $\mathbf{B}'$ et $\mathbf{B}''$ ne sont pas nuls, les deux directrices D' et D'' sont parallèles et situées à distance finie. Les droites de la congruence sont toutes les droites communes à deux complexes spéciaux dont les axes centraux sont parallèles, c'est-à-dire d'une part toutes les droites du plan (D', D'') , d'autre part toutes les parallèles à D' et D'' .

Si l'une des directrices, par exemple D' , est rejetée à l'infini ($\mathbf{B}' = 0$), la congruence est déterminée par les deux complexes spéciaux :

$$\mathbf{A}'\mathbf{m} = 0 \quad \mathbf{A}'\mathbf{m} + \mathbf{B}''\mathbf{n} = 0 \quad | \quad \mathbf{A}'\mathbf{q} = 0 \quad \mathbf{B}''\mathbf{p} + \mathbf{A}''\mathbf{q} = 0.$$

La congruence est formée des droites parallèles au plan $\mathbf{A}'$ qui coupent D'' .

Si les deux directrices sont rejetées à l'infini ($\mathbf{B}' = \mathbf{B}'' = 0$), la congruence est définie par

$$\mathbf{A}'\mathbf{m} = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{A}''\mathbf{m} = 0; \quad | \quad \mathbf{A}'\mathbf{q} = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{A}''\mathbf{q} = 0;$$

$$\text{par suite} \quad \sqrt{\mathbf{m}} \sqrt{\mathbf{A}'\mathbf{A}''} = 0 \quad | \quad \text{par suite} \quad \sqrt{\mathbf{q}} \sqrt{\mathbf{A}'\mathbf{A}''} = 0.$$

Alors si $\sqrt{\mathbf{A}'\mathbf{A}''} \neq 0$, les deux directrices sont distinctes ; les droites de la congruence sont toutes les droites parallèles à la direction $\sqrt{\mathbf{A}'\mathbf{A}''}$. Mais si $\sqrt{\mathbf{A}'\mathbf{A}''} = 0$, les deux équations précédentes se ramènent à une seule ; par exemple $\mathbf{A}'\mathbf{m} = 0$, et les droites de la congruence sont toutes les droites parallèles au plan $\mathbf{A}'$ **.

b) $m_{12}^2 - 4k_1k_2 = 0$ sans que tous les coefficients de l'équation en λ soient nuls. Dans ce cas la congruence, dite congruence *spéciale*, n'a

* PLÜCKER, *op. cit.*, p. 64, 83 et suivantes.

** STUDY (*Geom. der Dynamik*, p. 303) appelle cette congruence « un complexe planaire ».

qu'une directrice : c'est l'axe du seul complexe spécial appartenant au faisceau. Ses coordonnées sont :

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B}_1 - \sqrt{\frac{k_1}{k_2}} \mathbf{B}_2 \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A}_1 - \sqrt{\frac{k_1}{k_2}} \mathbf{A}_2 .$$

Cette directrice appartient d'ailleurs à tous les complexes du faisceau, car

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}_1 + \lambda \mathbf{A}_2) \mathbf{B}' + (\mathbf{B}_1 + \lambda \mathbf{B}_2) \mathbf{A}' &= 2k_1 + \lambda m_{12} - m_{12} \sqrt{\frac{k_1}{k_2}} - \lambda m_{12} \\ &= 2k_1 - 2\sqrt{k_1 k_2} \sqrt{\frac{k_1}{k_2}} = 0 . \end{aligned}$$

Par rapport à tous ces complexes, la directrice est sa propre conjuguée.

A tout point ρ de $(\mathbf{B}', \mathbf{A}')$ correspond donc un plan polaire $\mathbf{u}$ passant par cette droite : la directrice est le support d'une corrélation*.

Les droites $(\mathbf{m}, \mathbf{n})$ de la congruence sont toutes celles qui appartiennent à un complexe C du faisceau et rencontrent la directrice, droite de C.

A tout plan $\mathbf{u}$ passant par $(\mathbf{A}', \mathbf{B}')$ correspond donc un pôle ρ situé sur cette droite : la directrice est le support d'une corrélation*.

Les droites $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ de la congruence sont toutes celles qui appartiennent à un complexe K du faisceau et rencontrent la directrice, droite de K.

c) $k_1 = k_2 = m_{12} = 0$. — Les complexes donnés sont spéciaux ; leurs axes se coupent au point $\rho_{12} = \frac{\mathbf{V} \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2}{\mathbf{B}_1 \mathbf{A}_2}$ et sont situés dans le plan $\mathbf{u}_{12} = \frac{\mathbf{V} \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_2}{\mathbf{A}_1 \mathbf{B}_2}$.

Les droites de la congruence devant rencontrer $(\mathbf{B}_1, \mathbf{A}_1)$ et $(\mathbf{B}_2, \mathbf{A}_2)$ passeront en ρ_{12} ou seront situées dans $\mathbf{u}_{12}$. Toutes les droites de la congruence appartiennent donc à la gerbe de sommet ρ_{12} ou au champ $\mathbf{u}_{12}$; elles vérifient donc les relations

$$\begin{array}{l|l} \mathbf{V} \rho_{12} \mathbf{m} + \mathbf{n} = 0 & \mathbf{V} \rho_{12} \mathbf{q} + \mathbf{p} = 0 \\ \text{et} \quad \mathbf{V} \mathbf{u}_{12} \mathbf{n} + \mathbf{m} = 0 & \text{et} \quad \mathbf{V} \mathbf{u}_{12} \mathbf{p} + \mathbf{q} = 0 . \end{array}$$

La congruence est dite *singulière*.

Les complexes du faisceau sont tous spéciaux, car l'équation

$$(\mathbf{A}_1 + \lambda \mathbf{A}_2)(\mathbf{B}_1 + \lambda \mathbf{B}_2) = 0$$

est identiquement satisfaite, quel que soit λ ; leurs axes centraux forment un faisceau plan $(\rho_{12}, \mathbf{u}_{12})$. Toute droite de ce faisceau peut être considérée comme directrice.

* Voir ZINDLER, I, p. 163, 164 ; et CLEBSCH-LINDEMANN, p. 63, 64.

d) $m_{12}^2 - 4k_1k_2 < 0$. — Les directrices sont imaginaires : la congruence est dite *elliptique* ; k_1 et k_2 sont alors de même signe, c'est-à-dire que les complexes donnés sont tous deux dextrorsum ou tous deux sinistrorsum : il en est de même de tous les complexes du faisceau, car le paramètre de l'un quelconque de ces complexes est un trinôme

$$k_1 + \lambda m_{12} + \lambda^2 k_2$$

qui est du même signe que k_2 .

Deux complexes en involution. — Soit un complexe

$$C_1 = \mathbf{A}_1 \mathbf{m} + \mathbf{B}_1 \mathbf{n} = 0 ;$$

la condition pour que deux droites $(\mathbf{m}, \mathbf{n})$ et $(\mathbf{m}', \mathbf{n}')$ soient conjuguées par rapport à ce complexe est (223)

$$\frac{\mathbf{m}}{C_1} + \frac{\mathbf{m}'}{C_1'} = \frac{\mathbf{B}_1}{\mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1} \\ \frac{\mathbf{n}}{C_1} + \frac{\mathbf{n}'}{C_1'} = \frac{\mathbf{A}_1}{\mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1} .$$

Supposons que $(\mathbf{m}, \mathbf{n})$ appartienne au complexe

$$C_2 = \mathbf{A}_2 \mathbf{m} + \mathbf{B}_2 \mathbf{n} = 0 ;$$

multiplions scalairement les deux égalités précédentes par $\mathbf{A}_2$ et $\mathbf{B}_2$, et ajoutons ; il vient :

$$\mathbf{A}_2 \mathbf{m}' + \mathbf{B}_2 \mathbf{n}' = \frac{C_1'}{\mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1} m_{12} .$$

Par suite la condition pour que $(\mathbf{m}', \mathbf{n}')$ appartienne à C_2 est

$$m_{12} = 0 .$$

Lorsque cette condition est remplie, les deux complexes sont dits en involution : leur moment est nul*. De plus, si cette condition est vérifiée, l'équation (248) en λ devient simplement

$$k_1 + \lambda^2 k_2 = 0$$

d'où

$$\lambda = \pm \sqrt{-\frac{k_1}{k_2}} \equiv \pm \alpha .$$

Deux complexes en involution. — Soit un complexe

$$K_1 = \mathbf{B}_1 \mathbf{p} + \mathbf{A}_1 \mathbf{q} = 0 ;$$

la condition pour que deux droites $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ et $(\mathbf{p}', \mathbf{q}')$ soient conjuguées par rapport à ce complexe est (224)

$$\frac{\mathbf{p}}{K_1} + \frac{\mathbf{p}'}{K_1'} = \frac{\mathbf{A}_1}{\mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1} \\ \frac{\mathbf{q}}{K_1} + \frac{\mathbf{q}'}{K_1'} = \frac{\mathbf{B}_1}{\mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1} .$$

Supposons que $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ appartienne au complexe

$$K_2 = \mathbf{B}_2 \mathbf{p} + \mathbf{A}_2 \mathbf{q} = 0 ;$$

multiplions scalairement les deux égalités précédentes par $\mathbf{B}_2$ et $\mathbf{A}_2$, et ajoutons ; il vient :

$$\mathbf{B}_2 \mathbf{p}' + \mathbf{A}_2 \mathbf{q}' = \frac{K_1'}{\mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1} m_{12} .$$

Par suite la condition pour que $(\mathbf{p}', \mathbf{q}')$ appartienne à K_2 est

$$m_{12} = 0 .$$

* KLEIN, *Math. Ann.*, II, p. 201.

Dans ce cas les directrices ont pour coordonnées :

$$D'(\mathbf{B}' = \mathbf{B}_1 + \alpha \mathbf{B}_2, \mathbf{A}' = \mathbf{A}_1 + \alpha \mathbf{A}_2) \text{ et } D''(\mathbf{B}'' = \mathbf{B}_1 - \alpha \mathbf{B}_2, \mathbf{A}'' = \mathbf{A}_1 - \alpha \mathbf{A}_2),$$

et la congruence peut être définie par les deux complexes spéciaux

$$C' = C_1 + \alpha C_2 \text{ et } C'' = C_1 - \alpha C_2. \quad K' = K_1 + \alpha K_2 \text{ et } K'' = K_1 - \alpha K_2.$$

Cela étant, considérons un plan $\mathbf{u}$ et soient $\mathbf{p}'$ et $\mathbf{p}''$ ses pôles par rapport à C' et C'' , $\mathbf{R}'$ et $\mathbf{R}''$ ses points de rencontre avec D' et D'' .

On a :

$$\mathbf{R}' = \frac{\mathbf{p}' + \mu \mathbf{p}''}{1 + \mu}, \quad \mathbf{R}'' = \frac{\mathbf{p}' - \mu \mathbf{p}''}{1 - \mu}$$

en posant :

$$\mu \equiv \alpha \frac{\mathbf{B}_2 \mathbf{u}}{\mathbf{B}_1 \mathbf{u}};$$

par suite $(\mathbf{R}' \mathbf{R}'' \mathbf{p}' \mathbf{p}'') = -1$

c'est-à-dire que les quatre points forment une division harmonique, quel que soit le plan $\mathbf{u}$.

En particulier si le plan $\mathbf{u}$ tourne autour de la droite D de la congruence passant par $\mathbf{R}'$ et $\mathbf{R}''$, les pôles $\mathbf{p}'$ et $\mathbf{p}''$ se déplacent sur D mais de telle sorte que l'on ait toujours

$$(\mathbf{R}' \mathbf{R}'' \mathbf{p}' \mathbf{p}'') = -1.$$

Ces quatre points forment donc une involution : $\mathbf{R}'$ et $\mathbf{R}''$ sont les points doubles de l'involution.

Cela étant, considérons un point $\mathbf{p}$ et soient $\mathbf{u}'$ et $\mathbf{u}''$ ses plans polaires par rapport à K' et K'' , $\mathbf{U}'$ et $\mathbf{U}''$ les plans qu'il détermine avec D' et D'' .

On a :

$$\mathbf{U}' = \frac{\mathbf{u}' + \mu \mathbf{u}''}{1 + \mu}, \quad \mathbf{U}'' = \frac{\mathbf{u}' - \mu \mathbf{u}''}{1 - \mu}$$

en posant :

$$\mu \equiv \alpha \frac{\mathbf{A}_2 \mathbf{p}}{\mathbf{A}_1 \mathbf{p}};$$

par suite $(\mathbf{U}' \mathbf{U}'' \mathbf{u}' \mathbf{u}'') = -1$

c'est-à-dire que les quatre plans forment une division harmonique, quel que soit le point $\mathbf{p}$.

En particulier si le point $\mathbf{p}$ se déplace sur la droite D d'intersection des plans $\mathbf{U}'$ et $\mathbf{U}''$, les plans polaires $\mathbf{u}'$ et $\mathbf{u}''$ tournent autour de D mais de telle sorte que l'on ait toujours

$$(\mathbf{U}' \mathbf{U}'' \mathbf{u}' \mathbf{u}'') = -1.$$

Ces quatre plans forment donc une involution : $\mathbf{U}'$ et $\mathbf{U}''$ sont les plans doubles de l'involution.

Remarque I. — Dans ce qui précède les complexes en involution C_1 et C_2 (ou K_1 et K_2) étaient quelconques. Si $k_1 = 0$, le complexe C_1 (ou K_1) est spécial ; son axe central $(\mathbf{B}_1, \mathbf{A}_1)$ est directrice double de la congruence et appartient à C_2 (ou à K_2) ; d'ailleurs il appartient aussi à C_1 (ou K_1) et à un complexe quelconque du faisceau, car, quel que soit λ , on a :

$$(\mathbf{A}_1 + \lambda \mathbf{A}_2) \mathbf{B}_1 + (\mathbf{B}_1 + \lambda \mathbf{B}_2) \mathbf{A}_1 = 0.$$

Corollaire I. — Un complexe spécial est en involution avec tout complexe qui contient son axe central *.

Corollaire II. — Tout complexe spécial est en involution avec lui-même **.

Remarque II. — Si $k_1 = k_2 = 0$, on retombe dans le cas c) examiné ci-dessus (page 95).

Théorème. — Dans un faisceau de complexes il y a un seul complexe qui soit en involution avec un complexe donné ***.

Soient $C_1 + \lambda C_2 = 0$ et $C_1 + \mu C_2 = 0$ | Soient $K_1 + \lambda K_2 = 0$ et $K_1 + \mu K_2 = 0$
deux complexes du faisceau ; ils seront en involution si

$$(\mathbf{A}_1 + \lambda \mathbf{A}_2)(\mathbf{B}_1 + \mu \mathbf{B}_2) + (\mathbf{A}_1 + \mu \mathbf{A}_2)(\mathbf{B}_1 + \lambda \mathbf{B}_2) = 0$$

$$2k_2\lambda\mu + m_{12}(\lambda + \mu) + 2k_1 = 0 .$$

Si λ est donné, il n'y a qu'une valeur pour μ . c. q. f. d.

Inversement si μ est donné on a une seule valeur pour λ ; la relation précédente est linéaire en λ et μ ; c'est une relation projective.

Théorème. — Si un complexe C_0 (ou K_0) est en involution avec C_1 et C_2 (ou K_1 et K_2), il est en involution avec tout complexe du faisceau ****
 $C_1 + \lambda C_2$ (ou $K_1 + \lambda K_2$) .

En effet, si $m_{01} = m_{02} = 0$, on a aussi $m_{01} + \lambda m_{02} = 0$. c. q. f. d.

III. GERBE DE COMPLEXES

Soient

$$C_i = \mathbf{A}_i \mathbf{m} + \mathbf{B}_i \mathbf{n} = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

Soient

$$K_i = \mathbf{B}_i \mathbf{p} + \mathbf{A}_i \mathbf{q} = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

trois complexes linéaires tels que l'un quelconque d'entre eux n'appartienne pas au faisceau déterminé par les deux autres. Cela entraîne que l'on n'ait *pas à la fois* $[\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3] = 0$ et $[\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_3] = 0$.

* KÖENIGS, *Ann. de Toulouse*, 1892, p. 18.

** S. LIE, *Geometrie der Berührungstransformation*, I, p. 299.

** ZINDLER, *op. cit.*, I, p. 186.

**** S. LIE, *op. cit.*, I, p. 300.

Soit ρ un point quelconque d'une droite (m, n) commune aux trois complexes donnés ; il satisfait à la relation

$$\vee \rho m + n = 0$$

et l'on a :

$$(A_1 + \vee \rho B_1)m = 0$$

ce qui entraîne :

$$(A_1 + \vee \rho B_1) \vee (A_2 + \vee \rho B_2) (A_3 + \vee \rho B_3) = 0$$

ou

$$[A_1 A_2 A_3] + \sum \vee \rho B_1 \vee A_2 A_3 + \sum A_1 \vee \vee \rho B_2 \vee \rho B_3 = 0$$

$$[A_1 A_2 A_3] + \rho \sum \vee B_1 \vee A_2 A_3 + \sum (A_1 \rho \cdot [\rho B_2 B_3]) = 0.$$

Posons :

$$2A \equiv \sum \vee B_1 \vee A_2 A_3$$

$$= \vee B_1 \vee A_2 A_3 + \vee B_2 \vee A_3 A_1 + \vee B_3 \vee A_1 A_2$$

et

$$\Phi \equiv \sum (A_1 \cdot \vee B_2 B_3)$$

$$= A_1 \cdot \vee B_2 B_3 + A_2 \cdot \vee B_3 B_1 + A_3 \cdot \vee B_1 B_2$$

Il vient :

$$\rho \Phi \rho + 2A\rho + [A_1 A_2 A_3] = 0. \quad (275)$$

Les droites (m, n) communes aux trois complexes donnés sont donc sur une quadrique ; ce sont les génératrices d'un système ; on dit qu'elles forment *une demi-quadrique*.

D'autre part si une droite (m, n) appartient à C_1, C_2, C_3 elle appartient aussi à

$$\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \lambda_3 C_3 = 0 ;$$

Soit u un plan quelconque passant par une droite (p, q) commune aux trois complexes donnés ; il satisfait à la relation

$$\vee u p + q = 0$$

et l'on a :

$$(B_1 + \vee u A_1)p = 0$$

ce qui entraîne :

$$(B_1 + \vee u A_1) \vee (B_2 + \vee u A_2) (B_3 + \vee u A_3) = 0$$

ou

$$[B_1 B_2 B_3] + \sum \vee u A_1 \vee B_2 B_3 + \sum B_1 \vee \vee u A_2 \vee u A_3 = 0$$

$$[B_1 B_2 B_3] + u \sum \vee A_1 \vee B_2 B_3 + \sum (B_1 u \cdot [u A_2 A_3]) = 0.$$

Posons :

$$2B \equiv \sum \vee A_1 \vee B_2 B_3$$

$$= \vee A_1 \vee B_2 B_3 + \vee A_2 \vee B_3 B_1 + \vee A_3 \vee B_1 B_2$$

et

$$\Psi \equiv \sum (B_1 \cdot \vee A_2 A_3)$$

$$= B_1 \cdot \vee A_2 A_3 + B_2 \cdot \vee A_3 A_1 + B_3 \cdot \vee A_1 A_2.$$

Il vient :

$$u \Psi u + 2Bu + [B_1 B_2 B_3] = 0. \quad (276)$$

Les droites (p, q) communes aux trois complexes donnés sont donc sur une quadrique ; ce sont les génératrices d'un système : on dit qu'elles forment *une demi-quadrique*.

D'autre part si une droite (p, q) appartient à K_1, K_2, K_3 elle appartient aussi à

$$\lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2 + \lambda_3 K_3 = 0 ;$$

cette équation représente une gerbe de complexes. Pour qu'un complexe de cette gerbe soit spécial, il faut que

$$(\lambda_1 \mathbf{A}_1 + \lambda_2 \mathbf{A}_2 + \lambda_3 \mathbf{A}_3)(\lambda_1 \mathbf{B}_1 + \lambda_2 \mathbf{B}_2 + \lambda_3 \mathbf{B}_3) = 0$$

en supposant que $|\mathbf{B}_i| = 1$

$$\text{on a : } \omega(\lambda) = \lambda_1^2 k_1 + \lambda_2^2 k_2 + \lambda_3^2 k_3 + \lambda_2 \lambda_3 m_{23} + \lambda_3 \lambda_1 m_{31} + \lambda_1 \lambda_2 m_{12} = 0 \quad (227)$$

L'axe central d'un complexe spécial de la gerbe a pour coordonnées

$$\mathbf{B} = \lambda_1 \mathbf{B}_1 + \lambda_2 \mathbf{B}_2 + \lambda_3 \mathbf{B}_3 \quad \text{et} \quad \mathbf{A} = \lambda_1 \mathbf{A}_1 + \lambda_2 \mathbf{A}_2 + \lambda_3 \mathbf{A}_3 \quad .$$

Les droites $(\mathbf{m}, \mathbf{n})$ communes à C_1, C_2, C_3 coupent tous (∞^1) ces axes $(\mathbf{B}, \mathbf{A})$; dès lors ces axes constituent les génératrices du deuxième système ou la *demi-quadrique complémentaire* de la précédente.

Les droites $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ communes à K_1, K_2, K_3 coupent tous (∞^1) ces axes $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$; dès lors ces axes constituent les génératrices du deuxième système ou la *demi-quadrique complémentaire* de la précédente.

Voyons ce que devient la quadrique commune aux trois complexes donnés suivant la nature et les positions respectives de ces complexes *. Soit

$$\delta = \begin{vmatrix} 2 k_1 & m_{12} & m_{13} \\ m_{12} & 2 k_2 & m_{23} \\ m_{13} & m_{23} & 2 k_3 \end{vmatrix}$$

le discriminant de la forme quadratique $\omega(\lambda) = 0$.

1) $\delta \neq 0$. — $\omega(\lambda)$ se décompose en trois carrés, ou, ce qui revient au même, se ramène à la forme

$$\omega(\lambda) = \lambda_1^2 + \lambda_2 \lambda_3 ;$$

cela entraîne : $k_2 - k_3 : m_{31} - m_{12} = 0$ et $2 k_1 = m_{23} - 1$.

Les complexes C_2 et C_3 (ou K_2 et K_3) sont spéciaux; leurs axes centraux ne se coupent pas, mais tous deux appartiennent au complexe non spécial C_1 (ou K_1).

Si $[\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_3] \neq 0$ la quadrique est un hyperboloïde à une nappe dont le centre a pour vecteur

$$\frac{1}{2} \frac{\Phi_v}{[\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_3]} .$$

* La marche suivie dans cette discussion est empruntée à M. KÆNIGS (Ann. de Toulouse, 1892, p. 23 et suiv.)

Si $[\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2\mathbf{B}_3]=0$, le centre est rejeté à l'infini dans la direction Φ_v ; de plus la quadrique est tangente au plan de l'infini; car elle est satisfaite pour $\mathbf{u}=0$; c'est un paraboloïde hyperbolique: ses génératrices sont parallèles à un même plan comme cela résulte de $[\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2\mathbf{B}_3]=0$.

2) $\delta=0$ mais les mineurs de δ ne sont pas tous nuls. Dans ce cas $\omega(\lambda)$ peut se décomposer en deux carrés ou se ramener à la forme

$$\omega(\lambda) = \lambda_2\lambda_3 \quad ;$$

par suite : $k_1 = k_2 = k_3 = m_{31} = m_{12} = 0$ et $m_{23} = 1$.

Les trois complexes donnés sont spéciaux; les axes de C_2 et C_3 (ou K_2 et K_3) ne se coupent pas, mais tous deux coupent l'axe de C_1 (ou K_1) et appartiennent à C_1 (ou K_1). Les axes des complexes spéciaux de la gerbe forment deux faisceaux plans F_2 et F_3 fournis par $\lambda_2=0$ et $\lambda_3=0$

$$F_2 \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{B} = \lambda_1\mathbf{B}_1 + \lambda_3\mathbf{B}_3 \\ \mathbf{A} = \lambda_1\mathbf{A}_1 + \lambda_3\mathbf{A}_3 \end{array} \right. \quad F_3 \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{B} = \lambda_1\mathbf{B}_1 + \lambda_2\mathbf{B}_2 \\ \mathbf{A} = \lambda_1\mathbf{A}_1 + \lambda_2\mathbf{A}_2 \end{array} \right.$$

Les faisceaux F_2 et F_3 ont respectivement pour sommet et pour plan

$$F_2 \left(\rho_{31} = \frac{[\mathbf{A}_3\mathbf{A}_1]}{[\mathbf{B}_3\mathbf{A}_1]}, u_{31} = \frac{[\mathbf{B}_3\mathbf{B}_1]}{[\mathbf{A}_3\mathbf{B}_1]} \right); \quad F_3 \left(\rho_{12} = \frac{[\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2]}{[\mathbf{B}_1\mathbf{A}_2]}, u_{12} = \frac{[\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2]}{[\mathbf{A}_1\mathbf{B}_2]} \right).$$

Les droites communes aux trois complexes donnés devant couper les axes des complexes spéciaux qui déterminent la gerbe sont toutes les droites des faisceaux plans (ρ_{31}, u_{12}) et (ρ_{12}, u_{31}) . Ces faisceaux forment la demi-quadrique complémentaire de la demi-quadrique (ρ_{31}, u_{31}) et (ρ_{12}, u_{12}) .

3) $\delta=0$ et ses mineurs du premier ordre sont tous nuls. Alors $\omega(\lambda)$ peut se ramener à un seul carré, λ_3^2 par exemple. Il s'ensuit que

$$k_1 = k_2 = m_{23} = m_{31} = m_{12} = 0 \quad \text{et} \quad 2k_3 = 1.$$

Les complexes C_1 et C_2 (ou K_1 et K_2) sont spéciaux; leurs axes se coupent en ρ_{12} et déterminent le plan u_{12} ; ces axes appartiennent au complexe non spécial C_3 (ou K_3); de plus ρ_{12} est le pôle de u_{12} (et u_{12} est le plan polaire de ρ_{12}) par rapport à C_3 (ou K_3): les axes centraux des complexes de la gerbe forment le faisceau plan (ρ_{12}, u_{12}) .

Ces résultats se retrouvent en remarquant que les axes centraux des complexes de la gerbe sont fournis par $\lambda_3^2=0$; on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{B} = \lambda_1\mathbf{B}_1 + \lambda_2\mathbf{B}_2 \\ \mathbf{A} = \lambda_1\mathbf{A}_1 + \lambda_2\mathbf{A}_2 \end{array} \right.$$

Ceci n'est d'ailleurs qu'un cas particulier du précédent : F_2 coïncide avec F_3 .

4) L'équation $\omega(\lambda) = 0$ est satisfaite identiquement. Tous les complexes de la gerbe sont spéciaux et leurs axes centraux se coupent deux à deux.

Si $[\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2\mathbf{B}_3] \neq 0$ les axes centraux passent tous par un même point ρ_0 ; et les droites communes aux complexes donnés sont toutes les droites satisfaisant à la relation

$$\forall \rho_0 \mathbf{m} + \mathbf{n} = 0 \quad | \quad \forall \rho_0 \mathbf{q} + \mathbf{p} = 0.$$

Si $[\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2\mathbf{B}_3] = 0$ les axes centraux sont tous situés dans un même plan $\mathbf{u}_0$, et les droites communes aux trois complexes donnés sont toutes celles qui vérifient l'égalité

$$\forall \mathbf{u}_0 \mathbf{n} + \mathbf{m} = 0 \quad | \quad \forall \mathbf{u}_0 \mathbf{p} + \mathbf{q} = 0.$$

IV. COMPLEXES EN INVOLUTION

1) Coordonnées complexes.

Théorème. — Etant donnés six couples de vecteurs $(\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i)$ ($i = 1, 2, \dots, 6$) on peut exprimer deux vecteurs quelconques à l'aide de six couples par les formules

$$(278) \quad \begin{aligned} \mathbf{a} &= \sum \lambda_i \mathbf{a}_i \\ \mathbf{b} &= \sum \lambda_i \mathbf{b}_i \end{aligned} \quad i = 1, 2, \dots, 6$$

pourvu qu'il n'existe pas entre les $\mathbf{a}_i$ et les $\mathbf{b}_i$ une même relation linéaire et homogène.

En effet, remplaçons les vecteurs $\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i$ par leurs composantes suivant trois directions formant un vrai trièdre; on aura les six équations linéaires en λ

$$a^1 = \lambda_1 a_1^1 + \lambda_2 a_2^1 + \dots + \lambda_6 a_6^1$$

$$a^2 = \lambda_1 a_1^2 + \lambda_2 a_2^2 + \dots + \lambda_6 a_6^2$$

$$\dots \dots \dots$$

$$b^3 = \lambda_1 b_1^3 + \lambda_2 b_2^3 + \dots + \lambda_6 b_6^3$$

Si le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_6^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_6^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1^3 & b_2^3 & \cdots & b_6^3 \end{vmatrix} \quad (279)$$

est différent de zéro, on aura :

$$\lambda_i = \frac{\Delta_i(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{\Delta}$$

en désignant par Δ_i ce qui devient Δ quand on y remplace la i^e colonne par les composantes de $(\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i)$.

Considérons le couple $(\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i)$ comme les deux vecteurs du complexe

$$c_i = \mathbf{a}_i \mathbf{m} + \mathbf{b}_i \mathbf{n} = 0 \quad | \quad k_i = \mathbf{b}_i \mathbf{p} + \mathbf{a}_i \mathbf{q} = 0$$

et $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ comme les deux vecteurs du complexe

$$c = \mathbf{a} \mathbf{m} + \mathbf{b} \mathbf{n} = 0 ; \quad | \quad k = \mathbf{b} \mathbf{p} + \mathbf{a} \mathbf{q} = 0 ;$$

nous voyons que le complexe c (ou k) est complètement défini à l'aide des six complexes fondamentaux c_i (ou k_i) lorsqu'on se donne $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_6)$

$$c = \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \cdots + \lambda_6 c_6 . \quad (280) \quad | \quad k = \lambda_1 k_1 + \lambda_2 k_2 + \cdots + \lambda_6 k_6 . \quad (281)$$

Les (λ) peuvent donc être regardés comme les coordonnées complexes de c (ou k).

En particulier si $\mathbf{a} \mathbf{b} = 0$ le complexe c (ou k) est spécial ; les (λ) définissent alors son axe, c'est-à-dire une droite. On peut donc dire que les (λ) sont les coordonnées complexes d'une droite avec la condition

$$\mathbf{a} \mathbf{b} = \sum_i^6 \sum_j^6 \lambda_i \lambda_j \mathbf{a}_i \mathbf{b}_j = 0 \quad (282)$$

ou, en abrégé $\omega(\lambda) = 0$.

Par suite : la connaissance d'un système de valeurs des coordonnées (λ) détermine complètement soit un complexe linéaire quelconque, soit un complexe spécial, suivant que $\omega(\lambda)$ est différent de zéro ou nul.

Etablissons entre les λ p relations homogènes

$$f_i(\lambda) = 0 \quad (i = 1, 2 \cdots p) \quad p \leq 6 .$$

On obtient un système de complexes. Si les relations sont linéaires, le système de complexes est dit linéaire et à p termes. En joignant aux

équations précédentes la relation $\omega(\lambda) = 0$, on obtiendra tous les complexes spéciaux du système, c'est-à-dire un système réglé.

Remarque. — L'étude de ces systèmes à partir des coordonnées complexes peut être faite avec les procédés de la géométrie vectorielle, à condition d'étendre à l'espace à six dimensions les opérations sur les vecteurs à trois composantes*. Ce travail une fois fait, on est ramené à l'étude géométrique de l'espace à cinq dimensions et de ses rapports avec la quadrique $\omega(\lambda) = 0$.

Coordonnées de Plücker. — Jusqu'ici les vecteurs (a_i, b_i) ont été pris arbitrairement; assujettissons-les aux deux conditions

$$(283) \quad \begin{cases} a_i b_i = 0 & (i = 1, 2, \dots, 6) \\ m_{ij} = a_i b_j + a_j b_i = 0 & \begin{matrix} (i, j = 1, 2, \dots, 6) \\ j \neq i + 3 \end{matrix} \end{cases}$$

on aura : $ab = \lambda_1 \lambda_4 m_{14} + \lambda_2 \lambda_5 m_{25} + \lambda_3 \lambda_6 m_{36}$.

On peut encore supposer $m_{14} = m_{25} = m_{36} = 1$

et alors $ab = \lambda_1 \lambda_4 + \lambda_2 \lambda_5 + \lambda_3 \lambda_6 = \omega(\lambda)$. (284)

Un cas particulier est celui où

$$a_4 = a_5 = a_6 = 0$$

$$b_1 = b_2 = b_3 = 0;$$

dans ce cas désignons les λ par Λ ; il vient :

$$a = \Lambda_1 a_1 + \Lambda_2 a_2 + \Lambda_3 a_3$$

$$b = \Lambda_4 b_4 + \Lambda_5 b_5 + \Lambda_6 b_6$$

et faisons

$$a_1 b_4 = 1 \quad a_1 b_5 = 0 \quad a_1 b_6 = 0$$

$$a_2 b_4 = 0 \quad a_2 b_5 = 1 \quad a_2 b_6 = 0$$

$$a_3 b_4 = 0 \quad a_3 b_5 = 0 \quad a_3 b_6 = 1.$$

On pourra prendre :

$$b_4 = \frac{\sqrt{a_2 a_3}}{[a_1 a_2 a_3]} = a'_1 \quad b_5 = \frac{\sqrt{a_3 a_1}}{[a_1 a_2 a_3]} = a'_2 \quad b_6 = \frac{\sqrt{a_1 a_2}}{[a_1 a_2 a_3]} = a'_3$$

* Nous renvoyons pour cela aux travaux de MASSAU, *Cours de Mécanique*, (p. 436 et suiv.) et à des notes de M. Daniëls.

par suite

$$\mathbf{a} = \Lambda_1 \mathbf{a}_1 + \Lambda_2 \mathbf{a}_2 + \Lambda_3 \mathbf{a}_3 \quad (285)$$

$$\mathbf{b} = \Lambda_4 \mathbf{a}_1' + \Lambda_5 \mathbf{a}_2' + \Lambda_6 \mathbf{a}_3'$$

$$\mathbf{ab} = \Lambda_1 \Lambda_4 + \Lambda_2 \Lambda_5 + \Lambda_3 \Lambda_6 = \omega(\Lambda) \quad (286)$$

Les formules (285) et (286) définissent les coordonnées de Plücker pour le couple $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Les formules

$$(278) \quad \begin{cases} \mathbf{a} = \sum \lambda_i \mathbf{a}_i \\ \mathbf{b} = \sum \lambda_i \mathbf{b}_i \end{cases} \quad (i = 1, 2 \dots 6)$$

$$(284) \quad \mathbf{ab} = \lambda_1 \lambda_4 + \lambda_2 \lambda_5 + \lambda_3 \lambda_6 = \omega(\lambda)$$

en sont une généralisation. Il est aisé de voir ce que deviennent dans ce cas les six complexes fondamentaux. Les relations $\mathbf{a}_i \mathbf{b}_i = 0$ nous montrent que tous les complexes sont spéciaux. Les relations $m_{12} = 0$, $m_{13} = 0$ montrent que l'axe central du complexe $(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1)$ rencontre les axes des complexes $(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2)$ et $(\mathbf{a}_3, \mathbf{b}_3)$. De même les axes des complexes $(\mathbf{a}_4, \mathbf{b}_4)$, $(\mathbf{a}_5, \mathbf{b}_5)$ et $(\mathbf{a}_6, \mathbf{b}_6)$ se rencontrent. Mais comme $m_{14} \neq 0$ l'axe de $(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1)$ ne rencontre pas l'axe de $(\mathbf{a}_4, \mathbf{b}_4)$. Les axes forment un tétraèdre.

Coordonnées de Klein. — Supposons maintenant que tous les rectangles de $\omega(\lambda)$ soient nuls

$$m_{ij} = \mathbf{a}_i \mathbf{b}_j + \mathbf{a}_j \mathbf{b}_i = 0 \quad (i, j = 1, 2 \dots 6)$$

et que

$$k_i = \mathbf{a}_i \mathbf{b}_i = 1$$

Alors les formules

$$\mathbf{a} = \sum \lambda_i \mathbf{a}_i \quad (288)$$

$$\mathbf{b} = \sum \lambda_i \mathbf{b}_i$$

et

$$\mathbf{ab} = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_6^2 = \omega(\lambda) \quad (289)$$

définissent les coordonnées de Klein pour le couple $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

2) Complexes complémentaires.

Définition. — Considérons les p complexes linéaires

$$C_j = \mathbf{A}_j \mathbf{m} + \mathbf{B}_j \mathbf{n} = 0 \quad | \quad K_j = \mathbf{B}_j \mathbf{p} + \mathbf{A}_j \mathbf{q} = 0$$

($j = 1, 2 \dots p$), ($p < 6$)

et le système à p termes

$$(S) = \sum \mu_j (\mathbf{A}_j \mathbf{m} + \mathbf{B}_j \mathbf{n}) \quad | \quad (S) = \sum \mu_j (\mathbf{B}_j \mathbf{p} + \mathbf{A}_j \mathbf{q})$$

$$\text{Un complexe } \mathbf{A} \mathbf{m} + \mathbf{B} \mathbf{n} = 0 \quad | \quad \text{Un complexe } \mathbf{B} \mathbf{p} + \mathbf{A} \mathbf{q} = 0$$

est en involution avec tous les complexes du système (S) si l'on a :

$$\mathbf{A}_j \mathbf{B} + \mathbf{B}_j \mathbf{A} = 0 \quad . \quad (290)$$

Problème. — Cherchons l'expression générale des complexes $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$.
Exprimons $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ en coordonnées complexes à l'aide de six couples arbitraires $(\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i)$

$$(291) \quad \begin{cases} \mathbf{A} = \sum \lambda_i \mathbf{a}_i \\ \mathbf{B} = \sum \lambda_i \mathbf{b}_i \end{cases} \quad (i = 1, 2 \dots 6)$$

Portons dans (290), nous aurons les p équations de condition

$$(292) \quad \sum \lambda_i (\mathbf{A}_j \mathbf{b}_i + \mathbf{B}_j \mathbf{a}_i) = 0 \quad . \quad \begin{matrix} i = 1, 2 \dots 6 \\ j = 1, 2 \dots p \end{matrix}$$

Supposons ces p équations distinctes ; nous pourrions exprimer p des λ en fonction des $6 - p = h$ variables indépendantes v_i . Les vecteurs (291) seront alors de la forme

$$(293) \quad \begin{cases} \mathbf{A} = \sum v_i \mathfrak{A}_i \\ \mathbf{B} = \sum v_i \mathfrak{B}_i \end{cases} \quad (i = 1, 2 \dots h)$$

$(\mathfrak{A}_i, \mathfrak{B}_i)$ désignant de nouveaux couples linéairement exprimés à l'aide de $(\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i)$; et par suite $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ est un complexe du système

$$(s) = \sum v_i (\mathfrak{A}_i \mathbf{m} + \mathfrak{B}_i \mathbf{n}) \quad | \quad (s) = \sum v_i (\mathfrak{B}_i \mathbf{p} + \mathfrak{A}_i \mathbf{q})$$

$$(i = 1, 2 \dots h)$$

Les systèmes (S) et (s) sont ce que M. Kœnigs appelle deux *systèmes complémentaires* * ; (s) est l'expression la plus générale des complexes en involution avec (S).

Inversement le système complémentaire de (s) à h termes est le système (S) à $6 - h = p$ termes.

Complexes spéciaux en involution. — Les complexes spéciaux de (s) satisfont à la relation

$$\mathbf{AB} = \sum v_i^2 \mathfrak{A}_i \mathfrak{B}_i + \sum v_i v_j (\mathfrak{A}_i \mathfrak{B}_j + \mathfrak{A}_j \mathfrak{B}_i) = 0 \quad (i, j = 1, 2 \dots h)$$

équation d'une quadrique en coordonnées homogènes dans l'espace à $h - 1$ dimensions. A chaque point de cette quadrique correspond l'axe central d'un complexe spécial donné par les formules (293).

* *Ann. de Toulouse*, VI, p. 22. On les appelle aussi quelquefois *systèmes réciproques*. (Voir, par exemple, *STUDY, Geometrie der Dynamen*, p. 310.)

Si un complexe spécial est en involution avec un complexe, son axe appartient à ce complexe *. Par suite, les axes des complexes spéciaux en involution avec le système (S) sont les droites communes au système (S), d'où le théorème : Les droites communes à un système de complexes sont les axes des complexes spéciaux du système complémentaire, et réciproquement.

Ce théorème nous permettra d'obtenir les droites communes à un système quelconque de complexes linéaires en utilisant les résultats déjà obtenus. Il nous suffira de chercher les complexes spéciaux du système complémentaire.

3) Systèmes de complexes en involution.

Examinons maintenant les différents cas qui peuvent se présenter.

1) $p = 6$.

Existe-t-il des complexes en involution avec un système à six termes?

Les équations (292) sont au nombre de six ; le problème est impossible à moins que le déterminant des λ ne soit nul. Introduisons les coordonnées de Plücker (285), (286) et pour $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ prenons trois vecteurs unitaires trirectangulaires $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$; le déterminant n'est autre que le déterminant Δ (279) relatif aux six couples $(\mathbf{A}_i, \mathbf{B}_i)$. Il y a donc entre les six couples une relation linéaire et homogène. Le système (S) n'est pas à six termes, mais à cinq au plus ; d'où le théorème :

Si le système (S) est à six termes, il n'existe pas de complexe en involution.

2) $p = 5$, $h = 1$.

Le système (S) est à cinq termes : c'est un tissu de complexes.

$$(S) = \sum \mu_j (\mathbf{A}_j \mathbf{m} + \mathbf{B}_j \mathbf{n}) \quad | \quad (S) = \sum \mu_j (\mathbf{B}_j \mathbf{p} + \mathbf{A}_j \mathbf{q})$$

$$(j = 1, 2 \dots 5)$$

et le système complémentaire est à un terme

$$(s) = \nu_1 (\mathbf{A}_1 \mathbf{m} + \mathbf{B}_1 \mathbf{n}) \quad | \quad (s) = \nu_1 (\mathbf{B}_1 \mathbf{p} + \mathbf{A}_1 \mathbf{q}) .$$

Il n'existe donc qu'un complexe en involution avec (S) . Si ce complexe est spécial, c'est-à-dire si $\mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1 = 0$, les complexes du tissu ont en commun la droite de coordonnées $(\mathbf{B}_1, \mathbf{A}_1)$.

* P. 98, Coroll. I.

3) $p = 4$, $h = 2$.

Le système (S) forme un réseau de complexes

$$(S) = \sum \mu_j (\mathbf{A}_j \mathbf{m} + \mathbf{B}_j \mathbf{n}) \quad | \quad (S) = \sum \mu_j (\mathbf{B}_j \mathbf{p} + \mathbf{A}_j \mathbf{q})$$

$$(j = 1, 2 \dots 4)$$

et le système complémentaire est une congruence

$$(s) = \sum \nu_i (\mathbf{A}_i \mathbf{m} + \mathbf{B}_i \mathbf{n}) \quad | \quad (s) = \sum \nu_i (\mathbf{B}_i \mathbf{p} + \mathbf{A}_i \mathbf{q})$$

$$(i = 1, 2) .$$

Les droites communes aux complexes du réseau (S) sont les directrices de la congruence (s). De même que les directrices d'une congruence peuvent être distinctes, confondues ou former un faisceau plan, ainsi en est-il des droites communes aux complexes d'un réseau.

4) $p = h = 3$.

(S) et (s) sont des gerbes de complexes; les axes des complexes spéciaux de (S) forment une demi-quadrique, de même pour (s); les deux demi-quadriques sont complémentaires. Ce cas est étudié plus haut.

5) Lorsque $p = 2$, $h = 4$, (S) est à deux termes et (s) à quatre termes; on retombe dans le cas 3) à cause de la symétrie entre les systèmes (S) et (s).

6) De même si $p = 1$, $h = 5$, on retombe dans le cas 2).

Complexes fondamentaux de Klein. — Les complexes fondamentaux de Klein

$$c_i = \mathbf{a}_i \mathbf{m} + \mathbf{b}_i \mathbf{n} \quad | \quad k_i = \mathbf{b}_i \mathbf{p} + \mathbf{a}_i \mathbf{q}$$

sont définis par les relations

$$\mathbf{a}_i \mathbf{b}_i = 1$$

$$m_{ij} = \mathbf{a}_i \mathbf{b}_j + \mathbf{a}_j \mathbf{b}_i = 0 \quad (i, j = 1, 2 \dots 6)$$

Il n'y en a pas de spécial et l'un quelconque d'entre eux est en involution avec tous les autres. En groupant ces complexes en systèmes et étudiant les droites communes et les complexes spéciaux, on obtient des configurations remarquables bien connues depuis les travaux de Klein *. Il est inutile de nous arrêter aux considérations géométriques d'usage. Les résultats qui précèdent permettent d'exprimer tous les éléments en coordonnées vectorielles.

* Voir KLEIN, *Math. Ann.*, II, p. 203 et suiv.; KÖNIGS, *Ann. de Toulouse*, VII; JESSOP, *op. cit.*, p. 68 et suiv.

CHAPITRE IV

Le complexe quadratique

L'équation homogène et du second degré en coordonnées radiales doit être de la forme

$$C = \mathbf{m}\Phi\mathbf{m} + \mathbf{n}\Psi\mathbf{n} + 2\mathbf{m}\Theta\mathbf{n} = 0. \quad (294)$$

L'équation homogène et du second degré en coordonnées axiales doit être de la forme

$$K = \mathbf{p}\Upsilon\mathbf{p} + \mathbf{q}\Phi\mathbf{q} + 2\mathbf{q}\Theta\mathbf{p} = 0. \quad (295)$$

C'est l'équation générale d'un complexe quadratique ; montrons que cette équation renferme bien 21 termes scalaires comme celle de Plücker *.

On sait que
$$\Phi = \frac{\Phi + \Phi_c}{2} - \frac{1}{2} V\Phi_v ; \quad (73)$$

par suite (20) le terme $[\mathbf{m}\Phi, \mathbf{m}]$ s'annule et Φ est une dyadique auto-conjuguée. Dès lors si l'on ramène Φ à la forme nonion et si l'on développe le produit $\mathbf{m}\Phi\mathbf{m}$, la forme quadratique obtenue ne renfermera que six termes ; il en sera de même pour $\mathbf{n}\Psi\mathbf{n}$; quant au terme $2\mathbf{m}\Theta\mathbf{n}$, il contiendra neuf termes. Pour fixer les idées supposons

$$\Phi_3 = |a_{ik}|, \quad \Psi_3^* = |b_{ik}|, \quad \text{et} \quad \Theta_3 = |c_{ik}| \quad \text{avec} \quad c_{ik} \mp c_{ki}.$$

Cône du complexe.

Soit ρ_0 un point situé sur une droite du complexe ; ce point vérifie la relation

$$V\rho_0\mathbf{m} + \mathbf{n} = 0 ;$$

Conique du complexe.

Soit $\mathbf{u}_0$ un plan passant par une droite du complexe ; ce plan satisfait à la relation

$$V\mathbf{u}_0\mathbf{p} + \mathbf{q} = 0 ;$$

* J. PLÜCKER, *Neue Geometrie des Raumes*, p. 149 ; voir aussi JESSOP, *op. cit.*, p. 187.

par suite l'équation (294) devient :

$$\mathbf{m}\Phi\mathbf{m} - \sqrt{\mathbf{m}\rho_0\Psi}\sqrt{\rho_0\mathbf{m}} - 2\mathbf{m}\Theta\sqrt{\rho_0\mathbf{m}} = 0$$

ou

$$\mathbf{m}(\Phi - \sqrt{\rho_0\Psi}\sqrt{\rho_0} - 2\Theta\sqrt{\rho_0})\mathbf{m} = 0$$

équation de la forme

$$\mathbf{m}\Upsilon\mathbf{m} = 0.$$

Cette équation est homogène et du second degré en $\mathbf{m}$ c'est-à-dire en $\rho - \rho_0$ ou en $x - x_0, y - y_0, z - z_0$; elle représente un cône du second ordre, de sommet ρ_0 ; c'est le cône du complexe. La nature de ce cône dépend de la dyadique Υ qui est elle-même une fonction du point ρ_0 .

par suite l'équation (295) devient :

$$\mathbf{p}\Psi\mathbf{p} - \sqrt{\mathbf{p}\mathbf{u}_0\Phi}\sqrt{\mathbf{u}_0\mathbf{p}} - 2\mathbf{p}\Theta_c\sqrt{\mathbf{u}_0\mathbf{p}} = 0$$

ou

$$\mathbf{p}(\Psi - \sqrt{\mathbf{u}_0\Phi}\sqrt{\mathbf{u}_0} - 2\Theta_c\sqrt{\mathbf{u}_0})\mathbf{p} = 0$$

équation de la forme

$$\mathbf{p}\Omega\mathbf{p} = 0.$$

Cette équation est homogène et du second degré en $\mathbf{p}$ c'est-à-dire en $\mathbf{u} - \mathbf{u}_0$ ou en $u - u_0, v - v_0, w - w_0$; elle représente une courbe de seconde classe située dans le plan $\mathbf{u}_0$; c'est la conique du complexe. La nature de cette conique dépend de la dyadique Ω qui est elle-même une fonction du plan $\mathbf{u}_0$.

Surface singulière.

En particulier lorsque la dyadique Υ est planaire le cône du complexe se décompose en un système de deux plans *.

Le lieu des points ρ , pour lesquels ce fait se présente est la *surface singulière* du complexe C. Cette surface est du quatrième ordre : c'est une surface de Kummer. Mais lorsque Υ est planaire, pour

En particulier lorsque la dyadique Ω est planaire la conique du complexe se décompose en un système de deux points **.

L'enveloppe des plans $\mathbf{u}_0$ pour lesquels ce fait a lieu est la *surface singulière* du complexe K. Cette surface est de quatrième classe : c'est une surface de Kummer. Mais lorsque Ω est planaire, pour un

* En effet, dans ce cas la dyadique Υ peut se ramener à la forme

$$\Upsilon = s_1\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} + s_2\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}$$

et l'on a :

$$\mathbf{m}\Upsilon\mathbf{m} = s_1(x - x_0)^2 + s_2(y - y_0)^2 = 0.$$

C'est un système de 2 plans sécants réels ou imaginaires.

** En effet, dans ce cas la dyadique Ω peut se ramener à la forme

$$\Omega = \sigma_1\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} + \sigma_2\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}$$

et l'on a :

$$\mathbf{p}\Omega\mathbf{p} = \sigma_1(u - u_0)^2 + \sigma_2(v - v_0)^2 = 0.$$

C'est un système de 2 points.

un vecteur $\mathbf{l}$ convenablement choisi, on a :

$$\Upsilon \mathbf{l} = 0$$

ou, en supprimant l'indice dans ρ_0 ,

$$\Phi \mathbf{l} - \sqrt{\rho} \Psi \sqrt{\rho} \mathbf{l} - 2 \Theta \sqrt{\rho} \mathbf{l} = 0. \quad (296)$$

C'est, en vecteurs, l'équation de la surface de Kummer.

Pour avoir son équation algébrique, éliminons le vecteur-paramètre $\mathbf{l}$; si nous tenons compte de la relation (60), l'équation (296) devient successivement * :

$$\Phi \mathbf{l} = \frac{1}{\Psi_3} \sqrt{\rho} \Psi \sqrt{\rho} \Psi_2 \Psi_2 \mathbf{l} + 2 \Theta \sqrt{\rho} \mathbf{l}$$

ou

$$\Psi_3 \cdot \Phi \mathbf{l} =$$

$$\Psi_2 \rho \cdot \rho \Psi_2 \mathbf{l} - \Psi_2 \mathbf{l} \cdot \rho \Psi_2 \rho + 2 \Psi_3 \cdot \Theta \sqrt{\rho} \mathbf{l},$$

ce qui peut encore s'écrire

$$(\Psi_3 \cdot \Phi + \rho \Psi_2 \rho \cdot \Psi_2 - 2 \Psi_3 \cdot \Theta \sqrt{\rho}) \mathbf{l} = \rho \Psi_2 \mathbf{l} \cdot \Psi_2 \rho$$

d'où

$$\mathbf{l} = \rho \Psi_2 \mathbf{l} (\Psi_3 \cdot \Phi + \rho \Psi_2 \rho \cdot \Psi_2 - 2 \Psi_3 \cdot \Theta \sqrt{\rho})^{-1} \Psi_2 \rho$$

$$\mathbf{l} = \rho \Psi_2 \mathbf{l} (\Psi_3 \cdot \Phi \Psi_2^{-1} + \rho \Psi_2 \rho - 2 \Psi_3 \cdot \Psi_2^{-1} \Theta \sqrt{\rho})^{-1} \rho.$$

Multiplions par $\Psi_2 \rho$ et supprimons le facteur commun $\rho \Psi_2 \mathbf{l}$; il vient :

$$\Psi_2 \rho (\rho \Psi_2 \rho + \Psi_3 \cdot \Phi \Psi_2^{-1} - 2 \Psi_3 \cdot \Psi_2^{-1} \Theta \sqrt{\rho})^{-1} \rho = 1.$$

ou

$$\rho (\rho \Psi_2 \rho \cdot \Psi_2^{-1} + \Psi_3 \cdot \Phi \Psi_2^{-2} - 2 \Psi_3 \cdot \Psi_2^{-2} \Theta \sqrt{\rho})^{-1} \rho = 1. \quad (298)$$

C'est l'équation cherchée.

vecteur $\mathbf{v}$ convenablement choisi, on a :

$$\Omega \mathbf{v} = 0$$

ou, en supprimant l'indice dans $\mathbf{u}_0$,

$$\Psi \mathbf{v} - \sqrt{\mathbf{u}} \Phi \sqrt{\mathbf{u}} \mathbf{v} - 2 \Theta_c \sqrt{\mathbf{u}} \mathbf{v} = 0. \quad (297)$$

C'est, en vecteurs, l'équation tangentielle de la surface de Kummer.

Pour avoir son équation algébrique, éliminons le vecteur-paramètre $\mathbf{v}$; si nous tenons compte de la relation (60) l'équation (297) devient successivement * :

$$\Psi \mathbf{v} = \frac{1}{\Phi_3} \sqrt{\mathbf{u}} \sqrt{\Phi_2 \mathbf{u} \Phi_2} \mathbf{v} + 2 \Theta_c \sqrt{\mathbf{u}} \mathbf{v}$$

ou

$$\Phi_3 \cdot \Psi \mathbf{v} =$$

$$\Phi_2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \Phi_2 \mathbf{v} - \Phi_2 \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \Phi_2 \mathbf{u} + 2 \Phi_3 \cdot \Theta_c \sqrt{\mathbf{u}} \mathbf{v},$$

ce qui peut encore s'écrire ,

$$(\Phi_3 \cdot \Psi + \mathbf{u} \Phi_2 \mathbf{u} \cdot \Phi_2 - 2 \Phi_3 \cdot \Theta_c \sqrt{\mathbf{u}} \mathbf{v}) \mathbf{v} = \mathbf{u} \Phi_2 \mathbf{v} \cdot \Phi_2 \mathbf{u}$$

d'où

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} \Phi_2 \mathbf{v} (\Phi_3 \cdot \Psi + \mathbf{u} \Phi_2 \mathbf{u} \cdot \Phi_2 - 2 \Phi_3 \cdot \Theta_c \sqrt{\mathbf{u}})^{-1} \Phi_2 \mathbf{u}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} \Phi_2 \mathbf{v} (\Phi_3 \cdot \Psi \Phi_2^{-1} + \mathbf{u} \Phi_2 \mathbf{u} - 2 \Phi_3 \cdot \Phi_2^{-1} \Theta_c \sqrt{\mathbf{u}})^{-1} \mathbf{u}.$$

Multiplions par $\Phi_2 \mathbf{u}$ et supprimons le facteur commun $\mathbf{u} \Phi_2 \mathbf{v}$, il vient :

$$\Phi_2 \mathbf{u} (\mathbf{u} \Phi_2 \mathbf{u} + \Phi_3 \cdot \Psi \Phi_2^{-1} - 2 \Phi_3 \cdot \Phi_2^{-1} \Theta_c \sqrt{\mathbf{u}})^{-1} \mathbf{u} = 1$$

ou

$$\mathbf{u} (\mathbf{u} \Phi_2 \mathbf{u} \cdot \Phi_2^{-1} + \Phi_3 \cdot \Psi \cdot \Phi_2^{-2} - 2 \Phi_3 \cdot \Phi_2^{-2} \Theta_c \sqrt{\mathbf{u}})^{-1} \mathbf{u} = 1. \quad (299)$$

C'est l'équation cherchée.

* Voir GENTY, *Mémoire de géométrie vectorielle* sur les complexes du second ordre qui ont un centre de figure (*Journal Math.*, III, 8, 1882), p. 314, n° 18.

Au lieu de faire usage de la relation (60), introduisons un vecteur auxiliaire $\mathbf{r}$ tel que *

$$\Psi \mathbf{V} \rho \mathbf{l} = \mathbf{r}$$

d'où $\mathbf{V} \rho \mathbf{l} = \Psi^{-1} \mathbf{r}$.

L'équation (296) devient alors :

$$\Phi \mathbf{l} = \mathbf{V} \rho \mathbf{r} + 2 \Theta \Psi^{-1} \mathbf{r}.$$

Multiplions cette relation vectoriellement par $\Phi \rho$;

on a :

$$\mathbf{V} \Phi \rho \Phi \mathbf{l} = \mathbf{V} \Phi \rho \mathbf{V} \rho \mathbf{r} + 2 \mathbf{V} \Phi \rho \Theta \Psi^{-1} \mathbf{r},$$

d'où $\Phi_2 \mathbf{V} \rho \mathbf{l}$ ou $\Phi_2 \Psi^{-1} \mathbf{r} =$

$$\rho . \mathbf{r} \Phi \rho - \mathbf{r} . \rho \Phi \rho + 2 \mathbf{V} \Phi \rho \Theta \Psi^{-1} \mathbf{r}$$

ou encore

$$(\rho \Phi \rho + \Phi_2 \Psi^{-1-2} \mathbf{V} \Phi \rho \Theta \Psi^{-1}) \mathbf{r} = \rho . \mathbf{r} \Phi \rho$$

d'où l'on tire :

$$\mathbf{r} = \mathbf{r} \Phi \rho . (\rho \Phi \rho + \Phi_2 \Psi^{-1-2} \mathbf{V} \Phi \rho \Theta \Psi^{-1})^{-1} \rho .$$

Multiplions scalairement par $\Phi \rho$ et divisons les deux membres par le facteur commun $\mathbf{r} \Phi \rho$; il vient :

$$\Phi \rho (\rho \Phi \rho + \Phi_2 \Psi^{-1-2} \mathbf{V} \Phi \rho \Theta \Psi^{-1})^{-1} \rho = 1$$

ou

$$\rho (\rho \Phi \rho . \Phi^{-1} + \Phi^{-1} \Phi_2 \Psi^{-1} - 2 \Phi^{-1} \mathbf{V} \Phi \rho \Theta \Psi^{-1})^{-1} \rho = 1 .$$

(300)

Enfin on peut trouver simplement l'équation de la surface de Kummer en remarquant que la dyadique Υ (ou Ω) est planaire lorsque $\Upsilon_3 = 0$ (ou $\Omega_3 = 0$) . En particulier si l'on a soin de mettre la dyadique sous forme nonion, on aura l'équation ponctuelle ($\Upsilon_3 = 0$) ou tangentielle ($\Omega_3 = 0$) de la surface singulière sans forme de déterminant.

* Cf. GENTY, *l. cit.*, p. 314, n° 17.

Au lieu de faire usage de la relation (60), introduisons un vecteur auxiliaire $\mathbf{t}$ tel que *

$$\Phi \mathbf{V} \mathbf{u} \mathbf{v} = \mathbf{t}$$

d'où $\mathbf{V} \mathbf{u} \mathbf{v} = \Phi^{-1} \mathbf{t}$.

L'équation (297) devient alors :

$$\Psi \mathbf{v} = \mathbf{V} \mathbf{u} \mathbf{t} + 2 \Theta_c \Phi^{-1} \mathbf{t}.$$

Multiplions cette relation vectoriellement par $\Psi \mathbf{u}$;

on a :

$$\mathbf{V} \Psi \mathbf{u} \Psi \mathbf{v} = \mathbf{V} \Psi \mathbf{u} \mathbf{V} \mathbf{u} \mathbf{t} + 2 \mathbf{V} \Psi \mathbf{u} \Theta_c \Phi^{-1} \mathbf{t},$$

d'où $\Psi_2 \mathbf{V} \mathbf{u} \mathbf{v}$ ou $\Psi_2 \Phi^{-1} \mathbf{t} =$

$$\mathbf{u} . \mathbf{t} \Psi \mathbf{u} - \mathbf{t} . \mathbf{u} \Psi \mathbf{u} + 2 \mathbf{V} \Psi \mathbf{u} \Theta_c \Phi^{-1} \mathbf{t}$$

ou encore

$$(\mathbf{u} \Psi \mathbf{u} + \Psi_2 \Phi^{-1-2} \mathbf{V} \Psi \mathbf{u} \Theta_c \Phi^{-1}) \mathbf{t} = \mathbf{u} . \mathbf{t} \Psi \mathbf{u}$$

d'où l'on tire :

$$\mathbf{t} = \mathbf{t} \Psi \mathbf{u} . (\mathbf{u} \Psi \mathbf{u} + \Psi_2 \Phi^{-1-2} \mathbf{V} \Psi \mathbf{u} \Theta_c \Phi^{-1})^{-1} \mathbf{u} .$$

Multiplions scalairement par $\Psi \mathbf{u}$ et divisons les deux membres par le facteur commun $\mathbf{t} \Psi \mathbf{u}$; il vient :

$$\Psi \mathbf{u} (\mathbf{u} \Psi \mathbf{u} + \Psi_2 \Phi^{-1-2} \mathbf{V} \Psi \mathbf{u} \Theta_c \Phi^{-1})^{-1} \mathbf{u} = 1$$

ou

$$\mathbf{u} (\mathbf{u} \Psi \mathbf{u} . \Psi^{-1} + \Psi^{-1} \Psi_2 \Phi^{-1} - 2 \Psi^{-1} \mathbf{V} \Psi \mathbf{u} \Theta_c \Phi^{-1})^{-1} \mathbf{u} = 1 .$$

(301)

Surface complexe ou surface méridienne *

On appelle surface complexe l'enveloppe des cônes dont le sommet ρ_0 décrit une droite fixe (ρ_1, ρ_2) .

Le point ρ_0 étant sur la droite (ρ_1, ρ_2) est de la forme

$$\rho_0 = \frac{\rho_1 + \lambda \rho_2}{1 + \lambda}$$

et l'on a comme coordonnées d'une droite du complexe passant par ρ_0 :

$$m = \rho - \rho_0 = \frac{(\rho - \rho_1) + \lambda(\rho - \rho_2)}{1 + \lambda} = \frac{m_1 + \lambda m_2}{1 + \lambda}$$

$$n = \sqrt{\rho \rho_0} = \frac{1}{1 + \lambda} (\sqrt{\rho \rho_1} + \lambda \sqrt{\rho \rho_2}) = \frac{n_1 + \lambda n_2}{1 + \lambda}$$

Portons ces valeurs dans l'équation du cône du complexe, il vient :

$$C(m, n) \equiv C(m_1 + \lambda m_2, n_1 + \lambda n_2) = 0$$

ou

$$C(m_1, n_1) + 2\lambda(m_2 \Phi m_1 + m_2 \Theta n_1 + n_2 \Psi n_1 + n_2 \Theta_c m_1) + \lambda^2 C(m_2, n_2) = 0$$

ou plus brièvement

$$C_1 + 2\lambda C_{12} + \lambda^2 C_2 = 0.$$

Prenons l'enveloppe lorsque λ varie ; on aura :

$$C_{12}^2 - C_1 C_2 = 0. \quad (3o2)$$

C'est l'équation de la surface méridienne.

On appelle surface complexe le lieu des coniques dont le plan u_0 passe par une droite fixe (u_1, u_2) .

Le plan u_0 passant par la droite (u_1, u_2) est de la forme

$$u_0 = \frac{u_1 + \lambda u_2}{1 + \lambda}$$

et l'on a comme coordonnées d'une droite du complexe située dans u_0 :

$$p = u - u_0 = \frac{(u - u_1) + \lambda(u - u_2)}{1 + \lambda} = \frac{p_1 + \lambda p_2}{1 + \lambda}$$

$$q = \sqrt{u u_0} = \frac{1}{1 + \lambda} (\sqrt{u u_1} + \lambda \sqrt{u u_2}) = \frac{q_1 + \lambda q_2}{1 + \lambda}$$

Portons ces valeurs dans l'équation de la conique du complexe, il vient :

$$K(p, q) \equiv K(p_1 + \lambda p_2, q_1 + \lambda q_2) = 0$$

ou

$$K(p_1, q_1) + 2\lambda(q_2 \Phi q_1 + q_2 \Theta p_1 + p_2 \Psi p_1 + p_2 \Theta_c q_1) + \lambda^2 K(p_2, q_2) = 0$$

ou plus brièvement :

$$K_1 + 2\lambda K_{12} + \lambda^2 K_2 = 0.$$

Prenons le lieu quand λ varie ; on a :

$$K_{12}^2 - K_1 K_2 = 0. \quad (3o3)$$

C'est l'équation de la surface méridienne.

* Cf. J. PLÜCKER, *Neue Geom.*, p. 163-172 ; voir aussi C. M. JESSOP, *A treatise on the line complex*, n° 86.

Surface équatoriale *

Si la droite $(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$ est rejetée à l'infini, les coordonnées homogènes $(\mathbf{m}, \mathbf{n})$ de la droite du complexe se réduisent (136) simplement à $(\mathbf{p}_0, \mathbf{n})$. Le cône du complexe dégénère en un cylindre qui se déplace parallèlement à un plan fixe; la surface méridienne devient la surface équatoriale. Pour avoir son équation, remplaçons dans l'équation de la surface méridienne $\mathbf{m}$ par $\mathbf{p}_0$. Se rappelant que

$$\mathbf{p}_0 = \frac{\mathbf{p}_1 + \lambda \mathbf{p}_2}{1 + \lambda},$$

on en déduit successivement les expressions suivantes :

$$C(\mathbf{p}_0, \mathbf{n}) \equiv C(\mathbf{p}_1 + \lambda \mathbf{p}_2, \mathbf{n}_1 + \lambda \mathbf{n}_2) = 0$$

ou

$$C(\mathbf{p}_1, \mathbf{n}_1) + 2\lambda(\mathbf{p}_2 \Phi \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 \Theta \mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2 \Psi \mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2 \Theta_c \mathbf{p}_1) + \lambda^2 C(\mathbf{p}_2, \mathbf{n}_2) = 0$$

ce que l'on peut écrire plus brièvement :

$$c_1 + 2\lambda c_{12} + \lambda^2 c_2 = 0.$$

Prenons l'enveloppe lorsque λ varie; on trouve

$$c_{12}^2 - c_1 c_2 = 0 \quad (304)$$

comme équation de la surface équatoriale.

Si l'axe $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ est rejeté à l'infini, les coordonnées homogènes $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ de la droite du complexe se réduisent simplement à $(\mathbf{u}_0, \mathbf{q})$. Le plan de la conique du complexe se déplace parallèlement à lui-même; la surface méridienne devient la surface équatoriale. Pour avoir son équation, remplaçons dans l'équation de la surface méridienne $\mathbf{p}$ par $\mathbf{u}_0$. Se rappelant que

$$\mathbf{u}_0 = \frac{\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2}{1 + 1},$$

on en déduit successivement les expressions suivantes :

$$K(\mathbf{q}, \mathbf{u}_0) \equiv K(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2, \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = 0$$

ou

$$K(\mathbf{q}_1, \mathbf{u}_1) + 2l(\mathbf{q}_2 \Phi \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 \Theta \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \Psi \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \Theta_c \mathbf{q}_1) + l^2 K(\mathbf{q}_2, \mathbf{u}_2) = 0$$

ce que l'on peut écrire plus brièvement :

$$k_1 + 2lk_{12} + l^2 k_2 = 0.$$

Prenons le lieu quand l varie; on trouve

$$k_{12}^2 - k_1 k_2 = 0 \quad (305)$$

comme équation de la surface équatoriale.

* Voir J. PLÜCKER, *op. cit.*, p. 158-163 et p. 172-177.

Complexe polaire *

Soit $C(\mathbf{m}, \mathbf{n}) = 0$

l'équation d'un complexe quadratique ; cette équation peut évidemment s'écrire :

$$\mathbf{m}(\Phi\mathbf{m} + \Theta\mathbf{n}) + \mathbf{n}(\Psi\mathbf{n} + \Theta_c\mathbf{m}) = 0 ,$$

ou $\mathbf{A}\mathbf{m} + \mathbf{B}\mathbf{n} = 0$

en posant :

$$\begin{aligned} \Phi\mathbf{m} + \Theta\mathbf{n} &= \mathbf{A} \\ \Psi\mathbf{n} + \Theta_c\mathbf{m} &= \mathbf{B} \end{aligned} \quad (306)$$

Cela étant, considérons une droite D_{12} définie par les points $\mathbf{p}_1$ et $\mathbf{p}_2$ et soient $(\mathbf{m}_{12}, \mathbf{n}_{12})$ ses coordonnées ; désignons par $\mathbf{A}_{12}$ et $\mathbf{B}_{12}$ les vecteurs obtenus en remplaçant $(\mathbf{m}, \mathbf{n})$ par $(\mathbf{m}_{12}, \mathbf{n}_{12})$ dans l'expression de $\mathbf{A}$ et de $\mathbf{B}$. Dans ces conditions l'équation

$$C_{12}(\mathbf{m}, \mathbf{n}) = \mathbf{A}_{12}\mathbf{m} + \mathbf{B}_{12}\mathbf{n} = 0 \quad (308)$$

représentera un complexe linéaire attaché à la droite D_{12} ; c'est le *complexe polaire* relatif à la droite D_{12} .

1) Supposons que la droite D_{12} soit quelconque, c'est-à-dire qu'elle n'appartienne pas au complexe C ; alors

$$C(\mathbf{m}_{12}, \mathbf{n}_{12}) \neq 0 .$$

Mais à tout point

$$\frac{\mathbf{p}_1 + \lambda\mathbf{p}_2}{1 + \lambda}$$

de la droite D_{12} correspond un plan polaire par rapport à C_{12} $(\mathbf{m}, \mathbf{n}) = 0$.

Soit $K(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 0$

l'équation d'un complexe quadratique ; cette équation peut évidemment s'écrire :

$$\mathbf{p}(\Psi\mathbf{p} + \Theta_c\mathbf{q}) + \mathbf{q}(\Phi\mathbf{q} + \Theta\mathbf{p}) = 0$$

ou $\mathbf{B}\mathbf{p} + \mathbf{A}\mathbf{q} = 0$

en posant :

$$\begin{aligned} \Psi\mathbf{p} + \Theta_c\mathbf{q} &= \mathbf{B} \\ \Phi\mathbf{q} + \Theta\mathbf{p} &= \mathbf{A} \end{aligned} \quad (307)$$

Cela étant, considérons une droite Δ_{12} définie par les plans $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$ et soient $(\mathbf{p}_{12}, \mathbf{q}_{12})$ ses coordonnées ; désignons par $\mathbf{B}_{12}$ et $\mathbf{A}_{12}$ les vecteurs obtenus en remplaçant $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ par $(\mathbf{p}_{12}, \mathbf{q}_{12})$ dans l'expression de $\mathbf{B}$ et de $\mathbf{A}$. Dans ces conditions l'équation

$$K_{12}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \mathbf{B}_{12}\mathbf{p} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{q} = 0 \quad (309)$$

représentera un complexe linéaire attaché à la droite Δ_{12} ; c'est le *complexe polaire* relatif à la droite Δ_{12} .

1) Supposons que la droite Δ_{12} soit quelconque, c'est-à-dire qu'elle n'appartienne pas au complexe K ; alors

$$K(\mathbf{p}_{12}, \mathbf{q}_{12}) \neq 0 .$$

Mais à tout plan

$$\frac{\mathbf{u}_1 + \lambda\mathbf{u}_2}{1 + \lambda}$$

passant par la droite Δ_{12} correspond un pôle par rapport à K_{12} $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 0$.

* Voir J. PLÜCKER, p. 287 et suiv. ; C.-M. JESSOP, p. 88, *op. cit.*

L'ensemble de ces plans détermine un faisceau dont l'axe D'_{12} est appelé la *polaire* de D_{12} par rapport au complexe quadratique. Les coordonnées de la polaire D'_{12} se calculent comme celles de la conjuguée d'une droite par rapport à un complexe linéaire; on trouve pour ces coordonnées :

$$m'_{12} = C(m_{12}, n_{12}) \cdot B_{12} - A_{12} B_{12} \cdot m_{12} \quad (310)$$

$$n'_{12} = C(m_{12}, n_{12}) \cdot A_{12} - A_{12} B_{12} \cdot n_{12}$$

2) Supposons que D_{12} appartienne au complexe, c'est-à-dire que :

$$C(m_{12}, n_{12}) = 0 \quad .$$

Le complexe est dit *tangentiel*; la droite D_{12} coïncide avec sa polaire D'_{12} comme le montrent les formules ci-dessus. A tout point de la droite D_{12} correspond un plan passant par cette droite : D_{12} est le support d'une corrélation.

3) Supposons en outre que

$$A_{12} B_{12} = 0 ;$$

dans ce cas le complexe tangentiel est spécial; les droites D_{12} sont les droites singulières.

Diamètres *. — Dans un complexe quadratique on appelle diamètres les polaires des droites de l'infini. D'après cette définition le

L'ensemble de ces pôles détermine une ponctuelle dont le support Δ'_{12} est appelé la polaire de Δ_{12} par rapport au complexe quadratique. Les coordonnées de la polaire Δ'_{12} se déterminent comme celles de la conjuguée d'une droite par rapport à un complexe linéaire; on trouve pour ces coordonnées :

$$p'_{12} = K(p_{12}, q_{12}) \cdot A_{12} - A_{12} B_{12} \cdot p_{12} \quad (311)$$

$$q'_{12} = K(p_{12}, q_{12}) \cdot B_{12} - A_{12} B_{12} \cdot q_{12}$$

2) Supposons que Δ_{12} appartienne au complexe, c'est-à-dire que :

$$K(p_{12}, q_{12}) = 0 \quad .$$

Le complexe est dit *tangentiel*; la droite Δ_{12} coïncide avec sa polaire Δ'_{12} comme le montrent les formules ci-dessus. A tout plan passant par Δ_{12} correspond un point situé sur cette droite : Δ_{12} est le support d'une corrélation.

3) Supposons en outre que

$$A_{12} B_{12} = 0 ;$$

dans ce cas le complexe tangentiel est spécial; les droites Δ_{12} sont les droites singulières.

Diamètres. — Dans un complexe quadratique on appelle diamètres les polaires des droites de l'infini. D'après cette définition le

* Voir J. PLÜCKER, n° 235.

diamètre est la polaire du rayon $(0, \mathbf{n}_0)$; ses coordonnées sont :

$$\mathbf{m}'_0 = C(0, \mathbf{n}_0) \cdot \mathbf{B}_0$$

et $\mathbf{n}'_0 = C(0, \mathbf{n}_0) \cdot \mathbf{A}_0 - \mathbf{A}_0 \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{n}_0$,

$\mathbf{A}_0$ et $\mathbf{B}_0$ désignant les vecteurs obtenus en remplaçant $(\mathbf{m}, \mathbf{n})$ par $(0, \mathbf{n}_0)$ dans l'expression (306) de $\mathbf{A}$ et de $\mathbf{B}$. Par suite les coordonnées du diamètre peuvent encore s'écrire :

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{m}'_0 &= \mathbf{n}_0 \Psi \mathbf{n}_0 \cdot \Psi \mathbf{n}_0 \\ \mathbf{n}'_0 &= \mathbf{n}_0 \Psi \mathbf{n}_0 \cdot \Theta \mathbf{n}_0 - \mathbf{n}_0 \Psi \Theta \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{n}_0 \\ &= -\Psi \mathbf{n}_0 \Psi \mathbf{n}_0 \Theta \mathbf{n}_0 \end{aligned} \right\} \quad (312)$$

diamètre est la polaire de l'axe $(\mathbf{p}_0, 0)$; ses coordonnées sont :

$$\mathbf{p}'_0 = K(\mathbf{p}_0, 0) \cdot \mathbf{A}_0 - \mathbf{A}_0 \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{p}_0$$

et $\mathbf{q}'_0 = K(\mathbf{p}_0, 0) \cdot \mathbf{B}_0$,

$\mathbf{A}_0$ et $\mathbf{B}_0$ désignant les vecteurs obtenus en remplaçant $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ par $(\mathbf{p}_0, 0)$ dans l'expression (307) de $\mathbf{A}$ et de $\mathbf{B}$. Par suite les coordonnées du diamètre peuvent encore s'écrire :

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{p}'_0 &= \mathbf{p}_0 \Psi \mathbf{p}_0 \cdot \Theta \mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_0 \Psi \Theta \mathbf{p}_0 \\ &= -\Psi \mathbf{p}_0 \Psi \mathbf{p}_0 \Theta \mathbf{p}_0 \\ \text{et } \mathbf{q}'_0 &= \mathbf{p}_0 \Psi \mathbf{p}_0 \cdot \Psi \mathbf{p}_0 \end{aligned} \right\} \quad (313)$$

Lemme. — Soit $C(\mathbf{m}, \mathbf{n}) = \mathbf{m} \Phi \mathbf{m} + \mathbf{n} \Psi \mathbf{n} + 2\mathbf{m} \Theta \mathbf{n} = 0$

l'équation d'un cône du second ordre, où les coordonnées $(\mathbf{m}, \mathbf{n})$ ont été rendues homogènes

$$\mathbf{m} = \rho \tau_0 - \rho_0 \tau, \quad \mathbf{n} = \sqrt{\rho \rho_0};$$

désignons par x, y, z les coordonnées de ρ , et posons pour un instant

$$\mathbf{m} \Phi \mathbf{m} = \varphi, \quad \mathbf{n} \Psi \mathbf{n} = \psi, \quad \mathbf{m} \Theta \mathbf{n} = \theta.$$

Cela étant, le sommet du cône est fourni par l'expression

$$\nabla C = \frac{\partial C}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial C}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial C}{\partial z} \mathbf{k} = 0.$$

Il nous reste à faire le calcul de $\frac{\partial C}{\partial x}, \frac{\partial C}{\partial y}, \frac{\partial C}{\partial z}$; calculons, par exemple, $\frac{\partial C}{\partial x}$,

le calcul étant le même pour les deux autres dérivées. On a :

$$\frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial m_1} \cdot \frac{\partial m_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial n_2} \cdot \frac{\partial n_2}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial n_3} \cdot \frac{\partial n_3}{\partial x} + 2 \frac{\partial \theta}{\partial m_1} \cdot \frac{\partial m_1}{\partial x} + 2 \frac{\partial \theta}{\partial n_2} \cdot \frac{\partial n_2}{\partial x} + 2 \frac{\partial \theta}{\partial n_3} \cdot \frac{\partial n_3}{\partial x}$$

ou

$$\frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial m_1} \tau_0 + \frac{\partial \psi}{\partial n_3} y_0 - \frac{\partial \psi}{\partial n_2} z_0 + 2 \frac{\partial \theta}{\partial m_1} \tau_0 + 2 \frac{\partial \theta}{\partial n_3} y_0 - 2 \frac{\partial \theta}{\partial n_2} z_0.$$

Par suite :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \nabla C = & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial C}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial C}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial C}{\partial z} \mathbf{k} \right) \\ & - \frac{1}{2} \tau_0 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial m_1} \mathbf{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial m_2} \mathbf{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial m_3} \mathbf{k} \right) + \tau_0 \left(\frac{\partial \theta}{\partial m_1} \mathbf{i} + \frac{\partial \theta}{\partial m_2} \mathbf{j} + \frac{\partial \theta}{\partial m_3} \mathbf{k} \right) + \\ & + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial n_3} y_0 - \frac{\partial \psi}{\partial n_2} z_0 \right) \mathbf{i} + (\dots) \mathbf{j} + (\dots) \mathbf{k} \right] + \left[\left(\frac{\partial \theta}{\partial n_3} y_0 - \frac{\partial \theta}{\partial n_2} z_0 \right) \mathbf{i} + (\dots) \mathbf{j} + (\dots) \mathbf{k} \right] \end{aligned}$$

d'où

$$\nabla C = \tau_0 \Phi \mathbf{m} + \tau_0 \Theta \mathbf{n} + \nabla_{\rho_0} \Psi \mathbf{n} + \nabla_{\rho_0} \Theta_c \mathbf{m} .$$

Axe de cylindre. — Le cylindre est un cône dont le sommet est rejeté à l'infini dans une direction ρ_0 . Les coordonnées $(\mathbf{m}, \mathbf{n})$ deviennent (136) dans ce cas $(-\rho_0 \tau, \nabla_{\rho_0})$. Faisant $\tau = 1$, on obtient pour l'équation du cylindre :

$$C(-\rho_0, \mathbf{n}) = \rho_0 \Phi \rho_0 + \mathbf{n} \Psi \mathbf{n} - 2 \rho_0 \Theta \mathbf{n} = 0 .$$

Mais dans le cas du cylindre, $\tau_0 = 0$; et l'équation du centre devient simplement :

$$\nabla_{\rho_0} \Psi \mathbf{n} - \nabla_{\rho_0} \Theta_c \rho_0 = 0$$

ou

$$\Psi \mathbf{n} - \Theta_c \rho_0 = x \rho_0 .$$

en désignant par x une quantité scalaire quelconque. De cette équation

on tire
$$\Psi \mathbf{n} = x \rho_0 + \Theta_c \rho_0 ;$$

opérons par Ψ^{-1} , on a :
$$\mathbf{n} = \Psi^{-1}(x \rho_0 + \Theta_c \rho_0) .$$

Les coordonnées de l'axe du cylindre sont donc :

$$\mathbf{m} = -\rho_0 \quad \text{et} \quad \mathbf{n} = \Psi^{-1}(x \rho_0 + \Theta_c \rho_0) .$$

Centre du complexe quadratique *

Soient

$$\begin{aligned} \mathbf{m}' &= -\mathbf{n}\Psi\mathbf{n}.\Psi\mathbf{n} \\ \mathbf{n}' &= \sqrt{\Psi\mathbf{n}}\sqrt{\mathbf{n}\Theta\mathbf{n}} \end{aligned} \quad (312)$$

les coordonnées du diamètre et

$$\begin{aligned} \mathbf{m} &= -\rho \\ \mathbf{n} &= \Psi^{-1}(\mathbf{x}\rho + \Theta_c\rho) \end{aligned}$$

les coordonnées de l'axe d'un cylindre parallèle à la direction ρ . Le diamètre et l'axe du cylindre auront même direction si

$$\mathbf{m} = k\mathbf{m}'$$

ou si

$$\rho = k\mathbf{n}\Psi\mathbf{n}.\Psi\mathbf{n}$$

ou encore

$$\Psi\mathbf{n} = \frac{1}{k\mathbf{n}\Psi\mathbf{n}} \cdot \rho \quad (314)$$

Opérant par Ψ^{-1} on trouve :

$$\mathbf{n} = \frac{1}{k\mathbf{n}\Psi\mathbf{n}} \cdot \Psi^{-1}\rho \quad (315)$$

Un point $\mathbf{r}'$ du diamètre est donné (162) par le vecteur :

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= \frac{\mathbf{n}\Psi\mathbf{n}\sqrt{\Psi\mathbf{n}}\sqrt{\mathbf{n}\Theta\mathbf{n}}}{(\mathbf{n}\Psi\mathbf{n})^2(\Psi\mathbf{n})^2} \\ &= \frac{1}{\mathbf{n}\Psi\mathbf{n} \cdot (\Psi\mathbf{n})^2} \cdot \frac{1}{(k\mathbf{n}\Psi\mathbf{n})^4} \sqrt{\rho}\sqrt{\rho}\sqrt{\Psi^{-1}\rho\Theta\Psi^{-1}\rho} \end{aligned}$$

Mais en multipliant scalairement les relations (314) et (315), on a :

$$\mathbf{n}\Psi\mathbf{n} = \frac{1}{(k\mathbf{n}\Psi\mathbf{n})^2} \cdot \rho\Psi^{-1}\rho$$

et (314) donne :

$$(\Psi\mathbf{n})^2 = \frac{1}{(k\mathbf{n}\Psi\mathbf{n})^2} \cdot \rho^2$$

d'où

$$\mathbf{r}' = \frac{1}{\rho^2 \cdot \rho\Psi^{-1}\rho} \sqrt{\rho}\sqrt{\rho}\sqrt{\Psi^{-1}\rho\Theta\Psi^{-1}\rho}$$

* Pour cette théorie du centre cf. J. PLÜCKER, *op. cit.*

De même un point $\mathbf{r}$ de l'axe du cylindre est donné (162) par le vecteur :

$$\mathbf{r} = \frac{1}{\rho^2} \cdot \mathbf{V}\rho \Psi^{-1}(x\rho + \Theta_c\rho) .$$

Le milieu de la droite qui joint $\mathbf{r}$ et $\mathbf{r}'$ a pour expression

$$\frac{\mathbf{r} + \mathbf{r}'}{2} ;$$

et un point quelconque de la droite menée par ce point parallèlement au diamètre et à l'axe du cylindre sera donné par

$$\frac{\mathbf{r} + \mathbf{r}'}{2} + k_1\rho .$$

Montrons que le nombre x , qui entre dans l'expression de $\mathbf{r}$, peut être choisi de telle sorte que ce vecteur soit indépendant de ρ , c'est-à-dire de la forme

$$\frac{\mathbf{r} + \mathbf{r}'}{2} + k_1\rho = \mathbf{R} \quad (316)$$

où $\mathbf{R}$ est un vecteur fixe. Pour cela multiplions vectoriellement par ρ les deux membres de cette relation (316), il vient :

$$\mathbf{V}\rho(\mathbf{r} + \mathbf{r}') = 2\mathbf{V}\rho\mathbf{R} . \quad (317)$$

Calculons séparément chacune des expressions $\mathbf{V}\rho\mathbf{r}$ et $\mathbf{V}\rho\mathbf{r}'$;

$$\begin{aligned} \mathbf{V}\rho\mathbf{r} &= \frac{1}{\rho^2} \mathbf{V}\rho \mathbf{V}\rho \Psi^{-1}(x\rho + \Theta_c\rho) \\ &= \frac{\rho}{\rho^2} (x\rho \Psi^{-1}\rho + \rho \Psi^{-1}\Theta_c\rho) - x\Psi^{-1}\rho - \Psi^{-1}\Theta_c\rho \\ &= \rho \cdot \frac{\rho \Psi^{-1}\rho}{\rho^2} \left(x + \frac{\rho \Psi^{-1}\Theta_c\rho}{\rho \Psi^{-1}\rho} \right) - x\Psi^{-1}\rho - \Psi^{-1}\Theta_c\rho \end{aligned} \quad (318)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{V}\rho\mathbf{r}' &= \frac{1}{\rho^2 \cdot \rho \Psi^{-1}\rho} \mathbf{V}\rho \mathbf{V}\rho \mathbf{V}\rho \Psi^{-1}\rho \Theta \Psi^{-1}\rho \\ &= - \frac{1}{\rho \Psi^{-1}\rho} \mathbf{V}\rho \mathbf{V}\rho \Psi^{-1}\rho \Theta \Psi^{-1}\rho \\ &= - \Psi^{-1}\rho \cdot \frac{\rho \Theta \Psi^{-1}\rho}{\rho \Psi^{-1}\rho} + \Theta \Psi^{-1}\rho . \end{aligned} \quad (319)$$

Ajoutons membre à membre les relations (318) et (319), on a :

$$\nabla_{\rho}(\mathbf{r}+\mathbf{r}')=\rho.\frac{\rho\Psi^{-1}\rho}{\rho^2}\left(x+\frac{\rho\Psi^{-1}\Theta_c\rho}{\rho\Psi^{-1}\rho}\right)+\Psi^{-1}\rho\left(x+\frac{\rho\Theta\Psi^{-1}\rho}{\rho\Psi^{-1}\rho}\right)-\Psi^{-1}\Theta_c\rho+\Theta\Psi^{-1}\rho.$$

Choisissons la quantité x de telle sorte que

$$x+\frac{\rho\Theta\Psi^{-1}\rho}{\rho\Psi^{-1}\rho}=0;$$

cela entraîne (81) :

$$x+\frac{\rho\Psi^{-1}\Theta_c\rho}{\rho\Psi^{-1}\rho}=0.$$

Pour cette valeur de x , on a donc :

$$\nabla_{\rho}(\mathbf{r}+\mathbf{r}')=\Theta\Psi^{-1}\rho-\Psi^{-1}\Theta_c\rho$$

$$\text{ou (81) :} \quad = \{ \Theta\Psi^{-1} - (\Theta\Psi^{-1})_c \} \rho$$

$$\text{ou encore (72) :} \quad = \nabla_{\rho}(\Theta\Psi^{-1})_v.$$

Comparons avec la relation (317), il vient :

$$\mathbf{R} = \frac{1}{2} (\Theta\Psi^{-1})_v. \quad (320)$$

C'est le vecteur du centre du complexe quadratique.

Remarque. — Cette expression du centre est très simple, mais dans certains cas il peut être utile d'avoir pour le centre un vecteur dont les composantes se déduisent aisément des dyadiques Ψ et Θ ; de cette façon on se rapproche davantage des coordonnées cartésiennes. Pour cela ramenons les dyadiques Ψ et Θ à la forme nonion et effectuons la multiplication indiquée *.

On a :

$$\begin{aligned} \Psi_3.\Theta\Psi^{-1} = & \\ = & (c_{11}B_{11}+c_{12}B_{12}+c_{13}B_{13})\mathbf{i}.\mathbf{i}+(c_{11}B_{21}+c_{12}B_{22}+c_{13}B_{23})\mathbf{i}.\mathbf{j}+(c_{11}B_{31}+c_{12}B_{32}+c_{13}B_{33})\mathbf{i}.\mathbf{k} \\ & +(c_{21}B_{11}+c_{22}B_{12}+c_{23}B_{13})\mathbf{j}.\mathbf{i}+(c_{21}B_{21}+c_{22}B_{22}+c_{23}B_{23})\mathbf{j}.\mathbf{j}+(c_{21}B_{31}+c_{22}B_{32}+c_{23}B_{33})\mathbf{j}.\mathbf{k} \\ & +(c_{31}B_{11}+c_{32}B_{12}+c_{33}B_{13})\mathbf{k}.\mathbf{i}+(c_{31}B_{21}+c_{32}B_{22}+c_{33}B_{23})\mathbf{k}.\mathbf{j}+(c_{31}B_{31}+c_{32}B_{32}+c_{33}B_{33})\mathbf{k}.\mathbf{k} \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \Psi_3.(\Theta\Psi^{-1})_v = & \{ (c_{21}B_{31}+c_{22}B_{32}+c_{23}B_{33}) - (c_{31}B_{21}+c_{32}B_{22}+c_{33}B_{23}) \} \mathbf{i} \\ & + \{ (c_{31}B_{11}+c_{32}B_{12}+c_{33}B_{13}) - (c_{11}B_{31}+c_{12}B_{32}+c_{13}B_{33}) \} \mathbf{j} \quad (321) \\ & + \{ (c_{11}B_{21}+c_{12}B_{22}+c_{13}B_{23}) - (c_{21}B_{11}+c_{22}B_{12}+c_{23}B_{13}) \} \mathbf{k}. \end{aligned}$$

* GENTY, *l. cit.*, p. 301.

Cette expression se déduit aisément des déterminants de Ψ et Θ .

Mais on peut encore l'écrire :

$$\Psi_3 \cdot (\Theta \Psi^{-1})_v = (\Theta_c j \Psi_2 k - \Theta_c k \Psi_2 j) i + (\Theta_c k \Psi_2 i - \Theta_c i \Psi_2 k) j + (\Theta_c i \Psi_2 j - \Theta_c j \Psi_2 i) k$$

expression que l'on obtient en développant par rapport à la première ligne le déterminant vectoriel (symbolique) suivant :

$$D = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \Theta_c i & \Theta_c j & \Theta_c k \\ \Psi_2 i & \Psi_2 j & \Psi_2 k \end{vmatrix}. \quad (322)$$

La valeur du vecteur R en résulte immédiatement; en effet, si l'on appelle D la valeur de ce déterminant, on a :

$$R = \frac{D}{2\Psi_3}. \quad (323)$$

Equation de quelques complexes remarquables.

1) *Complexe des droites qui coupent une quadrique suivant des cordes vues d'un point fixe sous un angle droit **.

Soient p le point fixe et

$$f(p) = p\Phi p + 2Ap + a = 0$$

l'équation de la quadrique donnée. Un point d'une droite passant par p_0 sera sur la quadrique si l'on peut déterminer λ de telle sorte que

$$f(p_0 + \lambda m) = 0 \quad **$$

ou

$$\lambda^2 m\Phi m + 2\lambda m(\Phi p_0 + A) + f(p_0) = 0. \quad (324)$$

2) *Complexe des droites par lesquelles on peut mener deux plans tangents rectangulaires à une quadrique. (Complexe de Painvin) **.

Soient u_0 un plan fixe quelconque, et

$$g(u) = u\Psi u + 2Bu + b = 0$$

l'équation de la quadrique donnée. Un plan passant par une droite située dans u_0 sera tangent à la quadrique si l'on peut déterminer λ de telle sorte que

$$g(u_0 + \lambda p) = 0 \quad ***$$

ou

$$\lambda^2 p\Psi p + 2\lambda p(\Psi u_0 + B) + g(u_0) = 0. \quad (325)$$

* *Nouv. Ann. Math.*, (1872), p. 49; voir aussi A. DEMOULIN, *op. cit.*, p. 106.

** Cf. (164).

*** $u_0 + \lambda p_0 = u_0 + \lambda(u_1 - u_2)$ est le vecteur d'un plan passant par l'intersection de u_0 et d'un plan variable; il passe donc bien par une droite de u_0 .

Cette équation donne deux valeurs pour λ , soient λ_1 et λ_2 . D'après l'énoncé du problème on doit avoir

$$(\rho_0 + \lambda_1 \mathbf{m})(\rho_0 + \lambda_2 \mathbf{m}) = 0$$

$$\text{ou } \rho_0^2 + (\lambda_1 + \lambda_2)\rho_0 \mathbf{m} + \lambda_1 \lambda_2 \mathbf{m}^2 = 0$$

ou, en tenant compte de (324) :

$$\rho_0^2 - 2\rho_0 \mathbf{m} \cdot \frac{\mathbf{m}(\Phi \rho_0 + \mathbf{A})}{\mathbf{m} \Phi \mathbf{m}} + \frac{f(\rho_0)}{\mathbf{m} \Phi \mathbf{m}} \cdot \mathbf{m}^2 = 0.$$

Supposons que $\mathbf{m}$ n'appartienne pas au cône asymptotique de $f(\rho) = 0$ (ce qui entraîne $\mathbf{m} \Phi \mathbf{m} \neq 0$); alors on a :

$$\rho_0^2 \cdot \mathbf{m} \Phi \mathbf{m} - 2\rho_0 \mathbf{m} \cdot (\Phi \rho_0 + \mathbf{A}) \mathbf{m} + \mathbf{m}^2 \cdot (\rho_0 \Phi \rho_0 + 2\mathbf{A} \rho_0 + \mathbf{a}) = 0$$

ou

$$\sqrt{\rho_0 \mathbf{m}} \sqrt{\rho_0 \Phi \mathbf{m}} - \sqrt{\rho_0 \mathbf{m}} \sqrt{\mathbf{m} \Phi \rho_0} + 2 \sqrt{\rho_0 \mathbf{m}} \sqrt{\mathbf{A} \mathbf{m}} + \mathbf{a} \mathbf{m}^2 = 0 ;$$

$$\text{mais } \sqrt{\rho_0 \mathbf{m}} + \mathbf{n} = 0$$

d'où

$$\mathbf{n}(\sqrt{\mathbf{m} \Phi \rho_0} - \sqrt{\rho_0 \Phi \mathbf{m}}) - 2\mathbf{n} \sqrt{\mathbf{A} \mathbf{m}} + \mathbf{a} \mathbf{m}^2 = 0$$

ou (85) :

$$\mathbf{a} \mathbf{m}^2 + \mathbf{n} \sqrt{\Phi \mathbf{I} \mathbf{n}} + 2\mathbf{m} \sqrt{\mathbf{A} \mathbf{n}} = 0 \quad (326)$$

ou aussi (87) :

$$\mathbf{a} \mathbf{m}^2 + \mathbf{n}(\Phi_s - \Phi) \mathbf{n} + 2\mathbf{m} \sqrt{\mathbf{A} \mathbf{n}} = 0 \quad (328)$$

C'est l'équation d'un complexe quadratique.

D'ailleurs l'équation (326) peut encore s'écrire, en coordonnées axiales :

$$\mathbf{p} \sqrt{\Phi \mathbf{I} \mathbf{p}} + \mathbf{a} \mathbf{q}^2 - 2\mathbf{p} \sqrt{\mathbf{A} \mathbf{q}} = 0.$$

Par suite (299) la surface de Kummer relative à ce complexe a pour équation :

$$\mathbf{u}(\mathbf{u}^2 + \mathbf{a} \sqrt{\Phi \mathbf{I}} + 2\mathbf{a} \sqrt{\mathbf{A}} \sqrt{\mathbf{u}})^{-1} \mathbf{u} = 1.$$

Cette équation donne deux valeurs pour λ , soient λ_1 et λ_2 . D'après l'énoncé du problème on doit avoir

$$(\mathbf{u}_0 + \lambda_1 \mathbf{p})(\mathbf{u}_0 + \lambda_2 \mathbf{p}) = 0$$

$$\text{ou } \mathbf{u}_0^2 + (\lambda_1 + \lambda_2)\mathbf{u}_0 \mathbf{p} + \lambda_1 \lambda_2 \mathbf{p}^2 = 0$$

ou en tenant compte de (325) :

$$\mathbf{u}_0^2 - 2\mathbf{u}_0 \mathbf{p} \cdot \frac{\mathbf{p}(\Psi \mathbf{u}_0 + \mathbf{B})}{\mathbf{p} \Psi \mathbf{p}} + \mathbf{p}^2 \cdot \frac{\mathbf{g}(\mathbf{u}_0)}{\mathbf{p} \Psi \mathbf{p}} = 0.$$

Supposons que $\mathbf{p} \Psi \mathbf{p} \neq 0$; alors on a :

$$\mathbf{u}_0^2 \cdot \mathbf{p} \Psi \mathbf{p} - 2\mathbf{u}_0 \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}(\Psi \mathbf{u}_0 + \mathbf{B}) + \mathbf{p}^2 \cdot (\mathbf{u}_0 \Psi \mathbf{u}_0 + 2\mathbf{B} \mathbf{u}_0 + \mathbf{b}) = 0$$

ou

$$\sqrt{\mathbf{u}_0 \mathbf{p}} \sqrt{\mathbf{u}_0 \Psi \mathbf{p}} - \sqrt{\mathbf{u}_0 \mathbf{p}} \sqrt{\mathbf{p} \Psi \mathbf{u}_0} + 2 \sqrt{\mathbf{u}_0 \mathbf{p}} \sqrt{\mathbf{B} \mathbf{p}} + \mathbf{b} \mathbf{p}^2 = 0 ;$$

$$\text{mais } \sqrt{\mathbf{u}_0 \mathbf{p}} + \mathbf{q} = 0$$

d'où

$$\mathbf{q}(\sqrt{\mathbf{p} \Psi \mathbf{u}_0} - \sqrt{\mathbf{u}_0 \Psi \mathbf{p}}) - 2\mathbf{q} \sqrt{\mathbf{B} \mathbf{p}} + \mathbf{b} \mathbf{p}^2 = 0$$

ou (85) :

$$\mathbf{b} \mathbf{p}^2 + \mathbf{q} \sqrt{\Psi \mathbf{I} \mathbf{q}} + 2\mathbf{p} \sqrt{\mathbf{B} \mathbf{q}} = 0 \quad (327)$$

ou aussi (87) :

$$\mathbf{b} \mathbf{p}^2 + \mathbf{q}(\Psi_s - \Psi) \mathbf{q} + 2\mathbf{p} \sqrt{\mathbf{B} \mathbf{q}} = 0 \quad (329)$$

C'est l'équation du complexe de Painvin.

D'ailleurs l'équation (327) peut encore s'écrire en coordonnées radiales :

$$\mathbf{m} \sqrt{\Psi \mathbf{I} \mathbf{m}} + \mathbf{b} \mathbf{n}^2 - 2\mathbf{m} \sqrt{\mathbf{B} \mathbf{n}} = 0.$$

Par suite (298) la surface de Kummer relative à ce complexe a pour équation :

$$\rho(\rho^2 + \mathbf{b} \sqrt{\Psi \mathbf{I}} + 2\mathbf{b} \sqrt{\mathbf{B}} \sqrt{\rho})^{-1} \rho = 1.$$

C'est l'équation algébrique de la surface d'onde de Fresnel.

3) *Complexe des droites coupées harmoniquement par deux quadriques données **. (Complexe de Battaglini.) Soient

$$f(\rho) = \rho\Phi\rho + 2A\rho + a = 0$$

$$\text{et } g(\rho) = \rho\Psi\rho + 2B\rho + b = 0$$

les deux quadriques données. Un point d'une droite passant par ρ_0 sera situé sur ces quadriques si l'on peut déterminer λ et μ de telle sorte que :

$$f(\rho_0 + \lambda m) = 0 \quad \text{et} \quad g(\rho_0 + \mu m) = 0$$

ou

$$\lambda^2 m\Phi m + 2\lambda m(\Phi\rho_0 + A) + f(\rho_0) = 0$$

et

$$\mu^2 m\Psi m + 2\mu m(\Psi\rho_0 + B) + g(\rho_0) = 0.$$

Les racines de ces deux équations en λ et μ seront conjuguées harmoniquement si :

$$m\Phi m \cdot g(\rho_0) + m\Psi m \cdot f(\rho_0) - \\ - 2m(\Phi\rho_0 + A) \cdot m(\Psi\rho_0 + B) = 0$$

ou

$$m(b\Phi + a\Psi - 2A \cdot B)m + \\ + \sqrt{\rho_0 m}(\sqrt{\Psi\rho_0 \Phi m} - \sqrt{\Psi m \Phi \rho_0}) + \\ + 2\sqrt{\rho_0 m}\sqrt{B\Phi m} + (\sqrt{A\Psi m}) = 0$$

équation de la forme :

$$m\Omega m + n\sqrt{\Phi\Psi}n + 2m\Theta n = 0$$

en posant :

$$\Omega = b\Phi + a\Psi - 2A \cdot B$$

$$\text{et} \quad \Theta = \Phi\sqrt{B} + \Psi\sqrt{A}.$$

4) *Complexe des droites par lesquelles on peut mener un faisceau harmonique de plans tangents à deux quadriques données.* Soient

$$f(u) = u\Phi u + 2Au + a = 0$$

$$\text{et } g(u) = u\Psi u + 2Bu + b = 0$$

les deux quadriques données. Un plan passant par une droite située dans u_0 sera tangent à la quadrique si l'on peut déterminer λ et μ de telle sorte que :

$$f(u_0 + \lambda p) = 0 \quad \text{et} \quad g(u_0 + \mu p) = 0$$

ou

$$\lambda^2 p\Phi p + 2\lambda p(\Phi u_0 + A) + f(u_0) = 0$$

et

$$\mu^2 p\Psi p + 2\mu p(\Psi u_0 + B) + g(u_0) = 0.$$

Pour que les plans tangents forment un faisceau harmonique il faut que :

$$p\Phi p \cdot g(u_0) + p\Psi p \cdot f(u_0) - \\ - 2p(\Phi u_0 + A) \cdot p(\Psi u_0 + B) = 0$$

ou

$$p(b\Phi + a\Psi - 2A \cdot B)p + \\ + \sqrt{u_0 p}(\sqrt{\Psi u_0 \Phi p} - \sqrt{\Psi p \Phi u_0}) + \\ + 2\sqrt{u_0 p}(\sqrt{B\Phi p} + \sqrt{A\Psi p}) = 0$$

équation de la forme :

$$p\Omega p + q\sqrt{\Phi\Psi}q + 2p\Theta q = 0$$

en posant :

$$\Omega = b\Phi + a\Psi - 2A \cdot B$$

$$\text{et} \quad \Theta = \Phi\sqrt{B} + \Psi\sqrt{A}.$$

* Voir GENTY, *l. cit.*, p. 302.

En particulier si les quadriques sont de première classe et concentriques, on peut les ramener à la forme :

$$\rho\Phi\rho = 1 \quad \text{et} \quad \rho\Psi\rho = 1$$

et le complexe de Battaglini relatif à ces quadriques a pour équation :

$$m(\Phi + \Psi)m - n\mathbb{W}\Phi\Psi n = 0.$$

En particulier si les quadriques sont de première classe et concentriques, on peut les ramener à la forme :

$$u\Phi u = 1 \quad \text{et} \quad u\Psi u = 1$$

et les axes des faisceaux harmoniques des plans tangents à ces quadriques appartiennent au complexe :

$$p(\Phi + \Psi)p - q\mathbb{W}\Phi\Psi q = 0.$$

Génération projective du complexe quadratique *

Soient

$$C_i = A_i m + B_i n = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

quatre complexes linéaires donnés,

$$(\lambda) \quad C_1 - \lambda C_2 = 0$$

$$(\mu) \quad C_3 - \mu C_4 = 0$$

deux congruences passant respectivement par les complexes C_1, C_2 et C_3, C_4 . Supposons qu'à tout complexe de la congruence (λ) corresponde un seul complexe de la congruence (μ) et réciproquement : les deux congruences sont projectives ; soit

$$a\lambda\mu + b\lambda + c\mu + d = 0$$

la relation de projectivité. On a :

$$\lambda = \frac{C_1}{C_2} \quad \mu = \frac{C_3}{C_4} \quad \text{d'où}$$

Soient

$$K_i = B_i p + A_i q = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

quatre complexes linéaires donnés

$$(\lambda) \quad K_1 - \lambda K_2 = 0$$

$$(\mu) \quad K_3 - \mu K_4 = 0$$

deux congruences passant respectivement par les complexes K_1, K_2 et K_3, K_4 . Supposons qu'à tout complexe de la congruence (λ) corresponde un seul complexe de la congruence (μ) et réciproquement : les deux congruences sont projectives ; soit

$$a\lambda\mu + b\lambda + c\mu + d = 0$$

la relation de projectivité. On a :

$$\lambda = \frac{K_1}{K_2} \quad \mu = \frac{K_3}{K_4} \quad \text{d'où}$$

* Voir R. STURM, *Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie in synthetischer Behandlung* (III, p. 190. Leipzig, Teubner, 1896).

$$aC_1C_3 + bC_1C_4 + cC_2C_3 + dC_2C_4 = 0$$

ou

$$\begin{aligned} & a(\mathbf{A}_1\mathbf{m} + \mathbf{B}_1\mathbf{n})(\mathbf{A}_3\mathbf{m} + \mathbf{B}_3\mathbf{n}) + \\ & + b(\mathbf{A}_1\mathbf{m} + \mathbf{B}_1\mathbf{n})(\mathbf{A}_4\mathbf{m} + \mathbf{B}_4\mathbf{n}) + \\ & + c(\mathbf{A}_2\mathbf{m} + \mathbf{B}_2\mathbf{n})(\mathbf{A}_3\mathbf{m} + \mathbf{B}_3\mathbf{n}) + \\ & + d(\mathbf{A}_2\mathbf{m} + \mathbf{B}_2\mathbf{n})(\mathbf{A}_4\mathbf{m} + \mathbf{B}_4\mathbf{n}) = 0 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} & \mathbf{m}(a\mathbf{A}_1.\mathbf{A}_3 + b\mathbf{A}_1.\mathbf{A}_4 + c\mathbf{A}_2.\mathbf{A}_3 + d\mathbf{A}_2.\mathbf{A}_4)\mathbf{m} \\ & + \mathbf{n}(a\mathbf{B}_1.\mathbf{B}_3 + b\mathbf{B}_1.\mathbf{B}_4 + c\mathbf{B}_2.\mathbf{B}_3 + d\mathbf{B}_2.\mathbf{B}_4)\mathbf{n} \\ & + \mathbf{m}[a(\mathbf{A}_1.\mathbf{B}_3 + \mathbf{A}_3.\mathbf{B}_1) + b(\mathbf{A}_1.\mathbf{B}_4 + \mathbf{A}_4.\mathbf{B}_1) + \\ & + c(\mathbf{A}_2.\mathbf{B}_3 + \mathbf{A}_3.\mathbf{B}_2) + d(\mathbf{A}_2.\mathbf{B}_4 + \mathbf{A}_4.\mathbf{B}_2)]\mathbf{n} = 0 \end{aligned}$$

équation de la forme

$$\mathbf{m}\Phi\mathbf{m} + \mathbf{n}\Psi\mathbf{n} + 2\mathbf{m}\Theta\mathbf{n} = 0.$$

C'est un complexe quadratique.

$$aK_1K_3 + bK_1K_4 + cK_2K_3 + dK_2K_4 = 0$$

ou

$$\begin{aligned} & a(\mathbf{B}_1\mathbf{p} + \mathbf{A}_1\mathbf{q})(\mathbf{B}_3\mathbf{p} + \mathbf{A}_3\mathbf{q}) + \\ & + b(\mathbf{B}_1\mathbf{p} + \mathbf{A}_1\mathbf{q})(\mathbf{B}_4\mathbf{p} + \mathbf{A}_4\mathbf{q}) + \\ & + c(\mathbf{B}_2\mathbf{p} + \mathbf{A}_2\mathbf{q})(\mathbf{B}_3\mathbf{p} + \mathbf{A}_3\mathbf{q}) + \\ & + d(\mathbf{B}_2\mathbf{p} + \mathbf{A}_2\mathbf{q})(\mathbf{B}_4\mathbf{p} + \mathbf{A}_4\mathbf{q}) = 0 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} & \mathbf{p}(a\mathbf{B}_1.\mathbf{B}_3 + b\mathbf{B}_1.\mathbf{B}_4 + c\mathbf{B}_2.\mathbf{B}_3 + d\mathbf{B}_2.\mathbf{B}_4)\mathbf{p} \\ & + \mathbf{q}(a\mathbf{A}_1.\mathbf{A}_3 + b\mathbf{A}_1.\mathbf{A}_4 + c\mathbf{A}_2.\mathbf{A}_3 + d\mathbf{A}_2.\mathbf{A}_4)\mathbf{q} \\ & + \mathbf{p}[a(\mathbf{B}_1.\mathbf{A}_3 + \mathbf{B}_3.\mathbf{A}_1) + b(\mathbf{B}_1.\mathbf{A}_4 + \mathbf{B}_4.\mathbf{A}_1) + \\ & + c(\mathbf{B}_2.\mathbf{A}_3 + \mathbf{B}_3.\mathbf{A}_2) + d(\mathbf{B}_2.\mathbf{A}_4 + \mathbf{B}_4.\mathbf{A}_2)]\mathbf{q} = 0 \end{aligned}$$

équation de la forme

$$\mathbf{p}\Psi\mathbf{p} + \mathbf{q}\Phi\mathbf{q} + 2\mathbf{p}\Theta\mathbf{q} = 0$$

C'est un complexe quadratique.

Dans le cas particulier où $\mathbf{A}_i\mathbf{B}_i = 0$, le complexe engendré est le complexe tétraédral ou de Reye.



TABLE DES MATIERES

Pages

Introduction	1
------------------------	---

CHAPITRE I

Le calcul vectoriel.

I. Vecteurs. — Somme, produits scalaire et vectoriel ; vecteurs réciproques : application à la résolution des équations du 1 ^{er} degré, scalaires et vectorielles	17
II. Dyadiques. — Signification géométrique ; dyadique complète, planaire, linéaire ; dyadique inverse, dyadique adjointe, dyadique conjuguée ; droites doubles, réduction à la forme canonique ; équation d'Hamilton-Cayley. Produits et doubles produits scalaires et vectoriels de dyadiques	28

CHAPITRE II

Notions de géométrie analytique.

I. Point, plan, droite. — Equation du plan, du point ; problèmes ; transformations de coordonnées. Coordonnées radiales et axiales d'une droite, transformation de coordonnées, problèmes. Ponctuelles, faisceau de plans, faisceau de droites, gerbes de droites	42
II. Quadriques. — Equation ponctuelle et tangentielle ; centre ; plan polaire, pôle, diamètre, plan diamétral, diamètres conjugués, axes ; réduction des quadriques ; transformée par polaires réciproques ; équation complexe d'une quadrique ; quadriques réglées ; génération projective des quadriques	61

CHAPITRE III

Les complexes linéaires.

I. Le complexe linéaire. — Equation, pôle, plan polaire, droites conjuguées, diamètre, axe central ; paramètre, invariance du paramètre ; forme réduite du complexe ; complexe spécial	80
---	----

	Pages
II. Congruence linéaire. — Définition, faisceau de complexes ; droites de la congruence qui rencontrent une droite fixe ; directrices, axe et centre de la congruence, forme réduite, cylindroïde ; congruence parabolique, spéciale, singulière, elliptique ; deux complexes en involution, propriétés.	88
III. Gerbe de complexes. — Quadrique commune aux trois complexes d'une gerbe, discussion.	98
IV. Complexes en involution. — Coordonnées complexes, expression de deux vecteurs à l'aide de six couples de vecteurs, coordonnées de Plücker, de Klein ; complexes complémentaires ; complexes spéciaux en involution ; systèmes de complexes en involution : droites communes à 6, 5... complexes ; complexes fondamentaux de Klein	102

CHAPITRE IV

Le complexe quadratique.

Equation, cône, conique du complexe ; surface singulière, surface complexe, surface équatoriale. Complexe polaire, tangentiel ; diamètres, axes de cylindres, centre. Complexe de Painvin, de Battaglini. Génération projective du complexe quadratique	109
---	-----

